

2015. aasta kitsa matemaatika riigieksami analüüs

Tartu Ülikooli matemaatika-informaatikateaduskonna emeriitdotsent

Lea Lepmann

.....

1. Riigieksami eesmärk

Haridus- ja teadusministri määruse nr 59 kohaselt on gümnaasiumi lõpueksamite eesmärgid järgmised:

- 1) tagada eksamitulemuste üleriigiline võrreldavus, et õpilasel, lapsevanemal, koolil ja kooli pidajal saada võimalikult objektiivne ettekujutus õpitulemuste saavutatusest;
- 2) koolil, kooli pidajal, Haridus- ja teadusministeeriumil, õpilastel, lastevanematel saada tagasisidet õppimise ning õpetamise tulemuslikkusest koolis;
- 3) saada ülevaade riiklikus õppekavas sätestatud õpitulemuste saavutatusest eksamiainetes hariduspoliitiliste otsuste tegemiseks;
- 4) toetada õppekava rakendamist, suunata eksamiülesannete valiku kaudu õppeprotsessi;
- 5) siduda järjestikuste haridustasemete õppekavad ning võimaldada kasutada riigieksamitulemusi õpingute jätkamisel, anda võimalus kasutada riigieksamitulemusi rahvusvahelisel tasandil.

Käesoleva analüüsi koostamisel on kasutatud 2015. a kitsa matemaatika riigieksami statistikat, eksamitööd ja eksaminandide vastuseid.

2. Kitsa matemaatika eksami struktuur ja sisu

Matemaatikaeksam on 2011. a õppekava kohaselt kõigile õpilastele kohustuslik riigieksam. Iga õpilane võib aga valida, kas ta teeb kitsa või laia matemaatika eksami. 2015. aastal toimus selline eksam teist korda.

Kitsa matemaatika eksam sooritati kahes osas (I ja II osa). Esimene osa sisaldas seitset ja teine viit ülesannet. Kummagi osa eest võis saada maksimaalselt 50 punkti. Koos alaülesannete ehk osistega võis eksami struktuuris eristada 23 alaülesannet (tabel 1). Nii laia kui ka kitsa matemaatika eksamitöös oli seitse ühist ülesannet või selle osa (tabelis 1 toonitud lahtrid). Viimaste üheks eesmärgiks oli paigutada laia ja kitsa matemaatika eksami sooritanud eksaminandide tulemused ühtsele skaalale. Ühisosa ülesannete eest võis saada summaarselt 50 punkti (25 punkti mõlema osa eest).

Tabelis 1 on toodud ka iga ülesande sisule vastavad kitsa matemaatika ainekava kursuste numbrid (kursuste pealkirjad on ära toodud käesoleva analüüsi punktis 4.4). Selgub, et eksami koostajad on valinud ülesandeid kõigi kaheksa kursuse teemade hulgast, pooles ülesannetest on seostatud mitme kursuse teemad (poolpaksus kirjas on põhiline kursus). Nagu näha, oli eksamitöös kõige enam I kursuse teemasid sisaldavaid ülesandeid. Ka funktsioonide temaatikaga seotud ülesandeid (kursused V ja VI) oli üsna palju. Elulise kontekstiga ülesandeid oli eksamitöös kolm (25%).

Ülesannete kognitiivse taseme kirjeldamiseks kasutatakse tabelis kolmeastmelist skaalat:

- A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
- B – ühe- või kaheetapilise, suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;

C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Tabelisse 1 on märgitud iga alaülesande kõrgeim tase, mida eksaminand selle lahendamisel kasutama peab. Näiteks kui ülesandes tuleb teisendada avaldis või lahendada lihtsam võrrand, on see tase A. Kui aga logaritmivõrrandi lahendamisel tuleb eksaminandil valida, millist meetodit ta erinevate õpitud meetodite hulgast lahendamiseks peab kasutama, siis on see tase B. Kui vastuseni jõudmiseks on vaja leida pikem lahendustee (kasutada järjestikku rohkem kui kaht mudelit), siis on tegemist tasemega C. Mõistagi ei pruugi ülesannete jaotus tasemeteks olla ühene, sest see võib vahel sõltuda ka valitud lahendustest ja eksaminandi eelteadmistest antud vallas. Selgub, et B-taseme ülesandeid on eksamitöö mõlemas osas kõige rohkem.

Tabel 1. Eksami ülesehitus, punktide jaotumine ja ülesannete sisu

	I osa												II osa											
Ülesanne	1	2		3		4		5	6		7	1	2			3			4		5			
Alaülesanne	–	1	2	1	2	1	2	–	1	2	–	1	2	1	2	3	1	2	3	1	2	1	2	
Punktide arv	5	2	3	5		5		10	5	5	10	5	5	3	2	5	6	2	2	5	5	3	7	
Kognitiivne tase	A	A	B	A	B	B	B	B	A	B	C	B	B	A	B	C	C	B	A	B	C	B	B	
Kursus	I	VII, III		II, V		IV		I	V, I		II	V, VI		III		VI, I		I	VII I, VII					

3. Kitsa matemaatika eksami valikust

Kokku oli matemaatika riigieksami tegijaid 8142, mis on 96 võrra vähem kui eelmisel aastal. 2015. aastal valis kitsa matemaatika eksami 3422 (42,0%) ja laia matemaatika eksami 4720 (58,0%) eksaminandi. Seega eelistati laia matemaatika eksamit. Eelmisel aastal oli kitsa ja laia matemaatika eksami valinuid enam-vähem võrdselt, vastavalt 49,4% ja 50,6% eksaminandidest.

Valiku erisusi võib täheldada eksaminandide soorituskeelega ja soo lõikes. Selgus, et vene soorituskeelega eksaminandidest valis mõnevõrra suurem hulk kitsa matemaatika eksamit (52,1%), kuid eesti soorituskeelega puhul oli oluliselt suurem laia matemaatika eksami eelistus. Kitsa matemaatika eksami kasuks otsustas vaid 39,7% eesti soorituskeelega eksaminandidest. Tabelist 2 (esitatud 2014. ja 2015. aasta vastavad näitajad) näeme, et laia matemaatika eksami valinute osakaal on kasvanud mõlema soorituskeelega rühmas. Suurim oli laia matemaatika eksami valinute osakaalu tõus vene soorituskeelega eksaminandide rühmas. Viis inglise keeles eksami sooritanut valisid kõik kitsa matemaatika eksami.

Tabelist 2 on näha, et nii naised kui ka mehed eelistasid tänavu laia matemaatika eksamit. Kokkuvõttes oli laia matemaatika eksami valinute osakaal kasvanud kõigis tabelis esitatud alarühmades.

Tabel 2. Eksamivalik soorituskeele ja soo järgi

Eksami liik	Eesti soorituskeel	Vene soorituskeel	Naised	Mehed
Lai 2015	60,3% (4007)	47,9% (713)	52,4% (2418)	65,3% (2302)
Lai 2014	53,3% (3585)	38,7% (586)	45,3% (2112)	57,5% (2059)
Kitsas 2015	39,7% (2642)	52,1% (775)	47,6% (2200)	34,7% (1222)
Kitsas 2014	46,7% (3137)	61,3% (927)	54,7% (2548)	42,5% (1519)
Kokku 2015	100% (6649)	100% (1488)	100% (4618)	100% (3524)
Kokku 2014	100% (6722)	100% (1513)	100% (4660)	100% (3578)

Kitsa matemaatika eksamit eelistasid enim gümnaasiumi õhtuse või kaugõppe (87,0%), eksternõppe (78,6%) ja kutseõppe (63,7%) läbinud eksaminandid. Gümnaasiumi päevase õppe lõpetanute valis kitsa matemaatika eksami 36,2% ja varemlõpetanute vaid 29,9%. Lõpetatud koolitüübi järgi koostatud eksamivaliku pingerida kattub täielikult eelmise aasta omaga. Suurim erinevus ilmneb gümnaasiumi päevase õppe lõpetanute puhul, kus kitsa matemaatika eksami valijaid oli tänavu 8,5 protsendipunkti võrra vähem kui eelmisel aastal.

Kitsa matemaatika eksami tegijatelt küsiti, kumba matemaatika kursust – kitsast või laia – nad koolis õppisid. Küsimusele ei vastanud 270 (7,9%) eksaminandi. Vastanutest 742 (23,5%) olid õppinud laia matemaatika kursust ja ülejäänud kitsa matemaatika kursust.

Maakonniti varieerus kitsa matemaatika eksami valinute osakaal päris palju. Kitsa matemaatika eksamit valiti enim Järvamaal (60,6% kõigist maakonna eksaminandidest), Ida-Virumaal (54,7%), Läänemaal (54,1%) ja Võrumaal (53,7%), kõige vähem aga Hiiumaal (16,7%), Valgamaal (29,6%), Tartumaal (30,8%) ja Põlvamaal (34,3%). Eelmisel aastal jäi kitsa matemaatika eksami valinute osakaal vahemikku 65,8–19,0%. 2014. ja 2015. aastal kitsa matemaatika eksamit valinute esiviisikusse kuuluvad Võrumaa ja Ida-Virumaa, vähem valinute viisikusse Põlvamaa, Hiiumaa, Valgamaa ja Tartumaa.

Kitsa matemaatika eksami valinute osakaalu nii suure erinevuse mõlemal aastal on tinginud ilmselt see, et kitsa matemaatika eksami tegijatest umbes neljandiku (tänavu 28,3%, eelmisel aastal 23,6%) moodustavad muude õppevormide (kutseõpe, õhtune õpe, eksternõpe jm) lõpetanud ja nende osakaal maakonniti varieerub. Kui vaadata ainult päevase gümnaasiumi lõpetanute valikuid, siis jääb kitsa matemaatika eksami valinute osakaal tänavu hoopis väiksemasse vahemikku 21,3–36,7% (eranditeks Hiiumaa (2,4%) ja Ida-Virumaa (45,9%)).

4. Kitsa matemaatika eksami tulemused

4.1. Tulemused soo, õppekeele ja õppevormi järgi

Kitsa matemaatika eksami keskmine tulemus oli 37,0 punkti 100st. See tulemus on 6,8 punkti võrra kõrgem kui 2014. aastal. Null punkti said töö eest 0,3% eksaminandidest ehk 10 eksaminandi (kõik eesti soorituskeelega, 8 naist ja 2 meest). Nii naiste kui ka meeste parim tulemus oli 100 punkti ja madalaim tulemus 0 punkti. 0–10 punkti said 307 eksaminandi (9,0%), aasta tagasi oli selliseid eksaminande 737 (18,1%).

Naiste keskmine tulemus oli ka tänavu oluliselt parem meeste omast, vastavad keskmised on 38,7 punkti ja 34,1 punkti¹ (tabel 3, milles N tähistab vastava rühma eksaminandide arvu). Naistel oli 0–10-punktiste tööde osakaal väiksem ja üle 90-punktiste tööde osakaal suurem kui meestel.

Vene soorituskeelega eksaminandide tulemus oli oluliselt kõrgem eesti soorituskeelega eksaminandide omast (keskmised 39,5 ja 36,3). Aasta tagasi nende rühmade tulemused teineteisest ei erinenud. Kõige kõrgem oli viie inglise keeles eksami sooritanud eksaminandi keskmine tulemus. Rühma väiksust arvestades jäetakse nad edasises soorituskeele järgi tehtud analüüsis vaatluse alt välja.

Tabel 3. Keskmine tulemus soo ja soorituskeele järgi (sulgudes on vastav eksaminandide arv)

	N	Keskmine tulemus	0–10 punkti	91–100 punkti
Naised 2015	2200	38,7	8,5% (188)	2,0% (43)
Naised 2014	2548	31,0	17,9% (457)	1,5% (37)
Mehed 2015	1222	34,1	9,7% (119)	1,1% (14)
Mehed 2014	1519	28,8	18,4% (280)	0,5% (7)
Eesti keel 2015	2642	36,3	8,4% (222)	1,3% (35)
Eesti keel 2014	3137	30,1	16,6% (522)	0,9% (29)
Vene keel 2015	775	39,5	11,0% (85)	2,7% (21)
Vene keel 2014	927	30,4	23,2% (215)	1,6% (15)
Inglise keel 2015	5	61,8	0% (0)	20,0% (1)
Inglise keel 2014	3	59,3	0% (0)	0% (0)

Ootuspäraselt oli kõige kõrgem tulemus gümnaasiumi päevase õppe lõpetanutel – 41,9 punkti (tabel 4, milles Max tähistab eksami kõrgeimat tulemust). Neile järgnes varem lõpetanute tulemus 30,3 punkti. Kõige madalam oli kutseõppe läbinute keskmine tulemus 18,5 punkti. Kuna kitsa matemaatika eksami valinutest rohkem kui üks neljandik (28,3%) ei kuulu gümnaasiumi päevase õppe lõpetajate hulka (laia eksami tegijate seas oli neid vaid 8,3%), siis

¹ siin ja edaspidi on erinevuse olulisust hinnatud usaldusnivool 0,05.

oli gümnaasiumi päevase õppe läbinute keskmine tulemus 4,9 punkti kõrgem üldisest keskmisest (või muu õppevormi läbinute suure osakaalu tõttu kogu keskmine niipalju madalam).

Tabel 4. Keskmine tulemus õppevormi järgi

	N		Keskmine tulemus		Max		0–10p (%)		91–100p (%)	
	2015	2014	2015	2014	2015	2014	2015	2014	2015	2014
Eksternõpe või muu	77	54	24,7	11,2	91	48	24,7	53,7	1,3	0
Gümnaasiumi päevane õpe	2453	3109	41,9	34,2	100	98	3,3	10,3	1,9	1,4
Gümnaasiumi õhtune õpe	679	728	25,3	17,8	98	85	21,5	42,6	0,9	0
Kutseõpe	128	133	18,5	14,6	72	70	33,6	47,4	0	0
Varem-lõpetanud	85	43	30,3	24,2	98	82	22,3	34,9	3,5	0
Kokku	3422	4067	37,0	30,2	100	98	8,9	18,1	1,7	1

Tabelitest 3 ja 4 nähtub, et 0–10-punktiste tööde osakaal oli kitsa matemaatika eksamil tänavu umbes kaks korda väiksem kui eelmisel aastal. Selliste tööde osakaal on vähenenud kõigis soo, soorituskeele ja õppevormi järgi moodustatud rühmades. Eriti suur on madala tulemusega eksaminandide arvu langus gümnaasiumi päevaõppe lõpetanute seas (tänavu 80 ja mullu 320 eksaminandi). Mõnevõrra suurenenud on aga üle 90-punktiste tööde osakaal.

4.2. Tulemused maakondade kaupa

Analoogselt eelmise aastaga oli 70% kõigist eksaminandidest neljast suurlinnaga maakonnast (Harjumaa, Tartumaa, Ida-Virumaa ja Pärnumaa) ja ülejäänud 30% jagunesid 11 maakonna vahel (tabel 5). Maakondade kõrgeim ja madalaim keskmine eksamitulemus erinesid teineteisest 18,5 punkti võrra. Riigi keskmisest kõrgema tulemuse saavutasid Ida-Virumaa, Pärnumaa, Jõgevamaa, Saaremaa, Valgamaa, Läänemaa ja Viljandimaa eksaminandid. Pingerea eesotsas asuvad kahe suurema maakonna järel suhteliselt väikesed maakonnad nagu Jõgevamaa, Saaremaa ja Valgamaa. Ka pingerea lõpus asuvad väikesed maakonnad. Gümnaasiumi päevase õppe lõpetanute rühmas oli esiviisikus Jõgevamaa (51,7 punkti), Pärnumaa (47,7), Saaremaa (45,4), Valgamaa (44,8) ja Ida-Virumaa (37,0) ning madalama tulemusega oli Põlvamaa (31,7), Võrumaa (33,7) ja Lääne-Virumaa (34,9). Gümnaasiumi õhtuse või kaugõppe lõpetanute parimad tulemused jäid aga hoopis teistesse maakondadesse: Tartumaa (39,8), Viljandimaa (36,8), Lääne-Virumaa (33,3), Läänemaa (32,7) ja Saaremaa (30,2). Kutseõppe läbinute rühmas olid parimad tulemused Viljandimaal (22,8), Harjumaal

(22,3), Pärnumaal (21,9) ja Tartumaal (17,9) ning madalamad nendes maakondades, kus eksamitegijaid oli alla kümne (välja arvatud kahe Hiiumaa eksaminandi keskmine tulemus 21,0).

Kõigi maakondade tulemus (v.a Hiiumaa) tänavu paranes. Kõige rohkem tõusis tulemus Pärnumaal (13,7 punkti), Valgamaal (12,2) ja Põlvamaal (10,5). Positiivne on see, et kõigis maakondades (v.a Võrumaa) küünib kõrgeim saavutatud tulemus vähemalt 80 punktini. Üle 90-punktiste tööde osakaal oli suurem pingerea alguses olevatel maakondadel. Rohkem varieerus maakonniti 0–10-punktiste tööde osakaal (3,7%–15,4%, kui Hiiumaa välja arvata). Võrreldes eelmise aastaga muutus rohkem maakondade pingerea aligusosa. Lõpuviisikusse jäid mõlemal aastal Põlvamaa, Võrumaa, Lääne-Virumaa ja Järvamaa.

Tabel 5. Tulemused maakonniti

Maakond	N	N%	Keskmine tulemus			Valinuid (%)			Min 2015	Max 2015	91–100 p (%) 2015	0–10 p (%) 2015
			2015	2014	Kasv	2015	2014	Kasv				
Ida-Viru	365	10,7	41,8	33,3	8,5	54,7	57,1	–3	2	100	2,7	6,6
Pärnu	256	7,5	41,8	28,1	13,7	46,5	48,3	–1,8	4	96	1,2	5,9
Jõgeva	76	2,2	41,6	32,8	8,8	42,5	63,2	–20,7	0	94	1,3	13,2
Saare	82	2,4	40,3	40,5	–0,2	38,7	61,6	–22,9	2	98	2,4	3,7
Valga	50	1,5	39,5	27,3	12,2	29,6	31,5	–1,9	5	93	2,0	4,0
Lääne	112	3,3	38,9	34,5	4,4	54,1	55,4	–1,3	0	100	0,9	7,1
Viljandi	103	3,0	38,3	35,6	2,7	43,6	51,8	–8,2	6	89	0,0	3,9
Harju	1409	41,2	36,6	29,5	7,1	42,9	50,9	–8	0	100	2,1	11,3
Rapla	96	2,8	36,4	29,6	6,8	45,9	60,5	–14,6	0	80	0,0	4,2
Tartu	378	11,0	36,2	30,6	5,6	30,8	35,8	–5	2	95	1,6	4,8
Lääne-Viru	167	4,9	33,7	26,0	7,7	44,4	55,4	–11	0	98	0,6	10,2
Järva	117	3,4	31,2	26,8	4,4	60,6	57,0	3,6	4	93	0,9	15,4
Põlva	49	1,4	30,7	20,2	10,5	34,3	19,0	15,3	10	82	0,0	2,0
Võru	124	3,6	27,3	24,0	3,3	53,7	58,1	–4,4	2	70	0,0	11,3
Hiiu	7	0,2	23,3	30,9	–7,6	16,7	27,1	–10,4	0	86	0,0	42,9
Pole teada	31	0,9	32,9	–	–	14,4	–	–	1	91	3,2	22,6
Kokku	3421	100	37,0	30,2	6,8	42,0	49,4	–7,4	0	100	1,7	8,9

Tänavu vähenes kitsa matemaatika eksami valinute osakaal kõigis maakondades (v.a Järvamaa ja Põlvamaa).

Mullu selgus, et kõrgema tulemusega maakondades oli üldiselt suurem hulk eksaminande valinud kitsa matemaatika eksami. Tänavu sellist tendentsi täheldada ei saa. Kitsa matemaatika eksami valinute protsendid maakonniti on ühtlustunud ja valiku seos tulemusega pole enam nii tugev.

4.3. Tulemused I ja II osa ning ühisosa lõikes

Nagu eespool öeldud, on matemaatika riigieksami ülesanded jaotatud kahte ossa (7 + 5 ülesannet). Kummagi osa eest võis saada maksimaalselt 50 punkti. Töö esimese osa ülesanded on suunatud rohkem teadmiste kontrollile ja nende rakendamisele suhteliselt tuttavas olukorras. Teise osa ülesanded eeldavad mõnevõrra rohkem matemaatilise arutlemise oskust, erinevate teemade seostamist ja rakendusi elulises situatsioonis.

Laia ja kitsa matemaatika eksami ülesannete komplektis oli seitse ühesugust ülesannet (ühisosa ülesanded). Nende eest võis saada summaarselt 50 punkti. Mõlema osa ja ka ühisosa minimaalne tulemus oli 0 ning maksimaalne 50 punkti.

Kitsa matemaatika eksami I osa keskmine tulemus osutus tänavu oluliselt madalamaks II osa tulemusest nii kogu kontingendil kui ka soo ja soorituskeelega järgi moodustatud rühmades (tabel 6). Naised saavutasid meestest ka tänavu oluliselt parema tulemuse nii I, II kui ka ühisosa puhul. Suurim oli erinevus I osa tulemustes ja vähim ühisosa tulemustes. Vene soorituskeelega eksaminandide tulemused osutusid eesti soorituskeelega eksaminandide tulemustest oluliselt kõrgemateks kõigis vaadeldavates osades. Möödunud aastal ei erinenud need rühmad teineteisest statistiliselt ühegi osa puhul.

Kõige suurem erinevus I ja II osa tulemuse vahel oli kutseõppe (keskmised 7,9 ja 10,6), õhtuõppe (11,7 ja 13,6) ja eksternõppe (11,7 ja 13,0) läbinud eksaminandidel ning kõige väiksem gümnaasiumi päevaõppe läbinutel (20,5 ja 21,4). Eelmisel aastal oli olukord vastupidine: valdava osa oma punktidest said muude õppevormide lõpetanud just I osast. Ilmselt olid need eksaminandid seekord paremini keskendunud just II osale või oli see osa tänu elulistele ülesannetele nende jaoks lihtsam kui I osa.

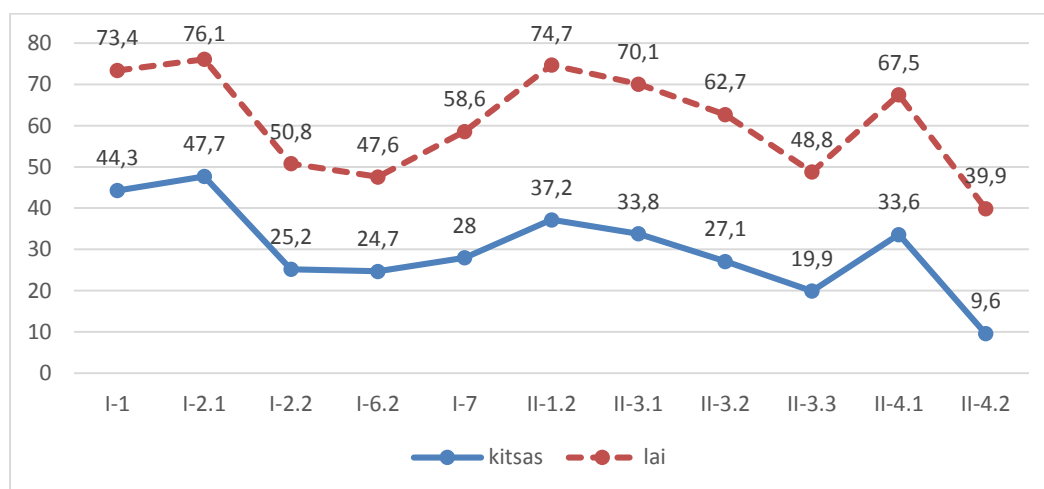
Kitsa ja laia matemaatika eksami ühisosa tulemus 14,9 punkti osutus oluliselt madalamaks I ja II osa tulemusest nii kogu kitsa eksami sooritanute kontingendil kui ka kõigis vaadeldavates alarühmades. See näitab, et tänavu olid ühisosas kitsa matemaatika eksami keerukamad ülesanded. Kui eelmisel aastal olid ühisosa ja ülejäänud osa tulemused kitsa matemaatika eksami eksaminandidel enam-vähem võrdsed (vastavad keskmised 15,3 punkti ja 14,9 punkti), siis tänavu oli siin oluliselt suurem erinevus: ühisosast saadi 40% ja ülejäänud osast 60% kogutulemusest (vastavad keskmised 14,9 punkti ja 22,1 punkti).

Tabel 6. Eksamiosade tulemused soo ja soorituskeele järgi (punktides)

	Kogu kontingent		Naised		Mehed		Eesti		Vene		Õppis laia	Õppis kitsast
Aasta	2015	2014	2015	2014	2015	2014	2015	2014	2015	2014	2015	2015
I osa	17,9	17,2	18,9	17,4	16,1	16,9	17,5	17,1	19,2	17,6	22,5	16,7
II osa	19,1	13,0	19,8	13,6	17,9	12,0	18,8	13,1	20,3	12,9	23,5	17,9
Ühisosa	14,9	15,3	15,5	15,6	14,0	14,9	14,4	15,1	16,6	16,2	19,1	13,7
Kogu töö	37,0	30,2	38,7	31,0	34,1	28,9	36,3	30,1	39,5	30,5	46,0	34,6

Tänavu oli võimalik uurida, kuivõrd sõltub tulemus sellest, kas eksaminand õppis koolis kitsast või laia matemaatikakursust. Nagu näha tabelist 6, oli laia matemaatikakursust õppinute tulemus kõigi osade lõikes üle 5 punkti kõrgem ja kogu eksamitöö puhul oli see vahe 11,4 punkti.

Kõige suuremad erinevused tulid ikkagi ilmsiks kitsa ja laia matemaatika eksami tegijate ühisosa tulemustes, erinevus oli statistiliselt oluline kõigi ülesannete korral (joonis 1). Graafikute sarnane kuju näitab, et nende kahe kontingendi teadmiste struktuur oli suhteliselt ühesugune, erinevus oli vaid tasemes.



Joonis 1. Kitsa ja laia matemaatika eksami ühisosa ülesannete lahendatus (protsentides)

Ühisosa tulemuste põhjal saab moodustada 8142 eksaminandi (nii kitsa kui ka laia matemaatika eksami sooritanute) pingerea ja võrrelda kogutulemusi maakondade lõikes. Selle pingerea esimene osa osutub mõnevõrra teistsuguseks tabelis 5 esitatud kitsa matemaatika eksami pingereast. Kõigi eksaminandide tulemuste lõikes oli maakondade paremusjärjestus järgmine: Hiiumaa (keskmine tulemus 33,2 punkti 50st), Saaremaa (27,1), Tartumaa (26,8), Viljandimaa (25,4), Ida-Virumaa (24,7), Jõgevamaa (24,7), Läänemaa (24,4), Pärnumaa (24,1), Harjumaa (23,5), Valgamaa (22,7), Lääne-Virumaa ja Raplamaa (mõlemad 21,6), Põlvamaa (20,4), Järvamaa (17,8) ja Võrumaa (17,5). Peaaegu samasugune pingerida tekkis ka gümnaasiumi

päevase õppe lõpetanute tulemuste põhjal (vaid Ida-Virumaa langes kolm kohta, Raplamaa ja Järvamaa tõusid ühe koha võrra).

Eksami I ja II osa vaheline Pearsoni korrelatsioonikordaja oli 0,82 ehk 67% ühe osa tulemuse varieeruvusest saab kirjeldada teise osa tulemuse kaudu. Kogu eksamitöö keskmine tulemus ning I ja II osa tulemus oli tugevas vastastikuses seoses (korrelatsioonikordajad vastavalt 0,96 ja 0,95). Ka eelmisel aastal olid need näitajad praktiliselt samad (vastavalt 0,83, 0,95 ja 0,96). Seosekordajate kõrged väärtused näitavad, et enam-vähem samad eksamitulemused oleksid olnud ka väiksema ülesannete arvuga eksamitöö korral.

4.4. Tulemused ülesannete kaupa

Järgnevas peatükis iseloomustatakse ülesannete lahendustulemusi ja võrreldakse iga ülesande lahendatust soo ja õppekeele järgi. Seejärel keskendutakse eksamitööde sisulisele analüüsile. Kuna nelja esimese ülesande võimalik maksimum oli 5 ja ülejäänutel 10 punkti, siis kasutatakse võrdluses keskmist lahendatuse protsenti (mitu protsenti moodustab ülesande keskmine tulemus võimalikust maksimumist). Tabelist 7 nähtub, et ülesanded olid eksaminandide jaoks erineva raskusega, keskmise lahendatuse protsent asub vahemikus 21,6 kuni 57,4. Üle 50% küünib lahendus vaid kahe ülesande korral (kummaski osas ühel ülesandel).

Tabelis on ülesanded jagatud lahendatuse järgi kolme ossa: paremini lahendatud, keskmiselt lahendatud ja halvemini lahendatud. Paremini lahendatud ülesanneteks olid: I-4, II-2, I-3 ja II-1. Need kõik on suhteliselt traditsioonilised, õpitud algoritmide rakendamise ülesanded. Keskmiselt lahendati ülesandeid I-1, II-5, I-2 ja I-5 ning halvemini lahendatud kolmandikku jäävad ülesanded II-3, I-7, I-6 ja II-4. Viimase rühma ülesannetest kolm nõudsid pikemat arutlust ja eksaminandilt endalt matemaatilise mudeli koostamist. Siia rühma kuulus ka logaritmivõrrandi lahendamine, mis on juba aastaid eksamil keerukaks osutunud (eeskätt eesti soorituskeelega eksaminandidele).

Tabelist 7 nähtub, et eksami I osa ülesanded olid parema eristusvõimega kui II osa ülesanded². Viimaste seas pole ühtegi hea eristusvõimega ülesannet (kaks esimest kõigil suhteliselt hästi ja kaks järgmist suhteliselt halvasti lahendatud).

² Eristusindeks näitab, mil määral ülesanne diferentseerib erineva tasemega õpilasi. Eristusindeksi väärtused asuvad lõigul –1st kuni 1ni ja hea eristusvõimega ülesande korral peaks indeksi väärtus olema suurem kui 0,3.

Tabel 7. Ülesannete tulemused soo ja soorituskeele järgi

Ülesande nr, teema	Klass	Lahendatus (%)	Naised	Mehed	Eesti	Vene	Eristus-indeks
I-1 astmed, lihtsustamine	X	44,3	48,4*	36,8*	40,8*	56,0*	0,42
I-2 kujundi pindala, integraal	XII	34,2	35,4	32,1	35,0*	31,2*	0,42
I-3 trigonomeetriline funktsioon	IX-X	48,2	48,0	48,5	49,0*	45,4*	0,44
I-4 tõenäosus	XI	57,4	56,8	58,5	57,6	57,0	0,65
I-5 lineaarvõrratuste süsteem	X	31,2	34,7*	25,0*	30,2*	34,4*	0,19
I-6 eksponent- ja logaritmivõrrand	XI	27,9	31,1*	22,2*	24,6*	39,2*	0,15
I-7 kolmnurga lahendamine	X	28,0	29,1	26,1	30,6*	26,0*	0,40
II-1 funktsiooni uurimine	IX-X	46,2	50,6*	38,3*	44,5*	52,0*	0,22
II-2 sirge võrrand	X	50,3	53,5*	44,5*	49,9	51,6	0,27
II-3 aritmeetiline jada	XI	29,7	29,7	29,5	29,6	29,7	0,13
II-4 protsent, võrrandi koostamine	X	21,6	19,5*	25,3*	19,4*	28,7*	0,12
II-5 stereomeetria	XII	43,5	44,5*	41,8*	44,3*	40,8*	0,22

Naiste ja meeste tulemused erinesid teineteisest oluliselt 7 ülesande korral 12st (tabelis 7 on olulist erinevust tähistatud tärniga (*ga)). Enamikul juhtudel oli naiste tulemus kõrgem. Meeste tulemus osutus naiste omast oluliselt kõrgemaks ülesande II-4 ja mitteoluliselt ka I-4 korral. Need ülesanded kuuluvad nn eluliste ülesannete valdkonda.

Soorituskeele järgi moodustatud rühmades erinesid tulemused oluliselt 9 ülesande korral. Kolme ülesannet lahendasid paremini eesti ja kuut vene soorituskeelelega eksaminandid. Kokkuvõtvalt tulid viimased paremini toime algebra teemadega, eesti soorituskeelelega eksaminandid aga tasandi- ja ruumigeomeetria ning trigonomeetriaülesandega. Sama ilmnes ka eelmise aasta eksamitööde analüüsimisel. Tänavu ei täheldatud aga enam soorituskeelepõhist erinevust tõenäosusteooria ülesande lahendustulemustes. Kõige suurema edumaa saavutasid vene soorituskeelelega eksaminandid algebralises lihtsustamises, eksponent- ja logaritmivõrrandi ning protsentülesande lahendamisel.

Järgnevas analüüsitakse detailsemalt üksikülesannete tulemusi. Selleks vaadeldakse üldisi keskmisi, hindamisjuhendit ja analüüsi koostaja tähelepanekuid, mis on tehtud 296 eksaminandi eksamitöö põhjal.

Ülesanne I-1 (5*3 punkti)

Lihtsustage avaldis $\left(\frac{6a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{b}{3a}\right)^4 - a^3 : a^{2,5} + \left(a^{\frac{1}{12}}\right)^6$, kus $a > 0, b \neq 0$.

Ülesanne kuulus kitsa matemaatika I kursusesse *Arvuhulgad. Avaldised. Võrrandid ja võrratused*. Eksaminand pidi tundma ja rakendama erinevaid astendamise reegleid (korrutise ja jagatise astendamine, astme astendamine, sama alusega astmete korrutamine ja jagamine), sooritama tehteid algebraliste murdude ja üksliikmetega ning tundma tehete järjekorda. Ülesanne eeldas vaid kõigi nimetatud protseduuride tundmist ja oli suhteliselt traditsiooniline, seejuures eelmise aasta samateemalisest ülesandest märksa lihtsam. Siiski ei asunud paljud seda ülesannet üldse lahendama või said tulemuseks 0 punkti.

Ülesande lahendatus oli 44,3% ja see kuulub keskmiselt lahendatud ülesannete hulka. Parema tulemuse saavutasid naised ja vene soorituskeelega eksaminandid.

Eksaminandide vead olid seotud eeskätt astendamisega. Kõige sagedasem viga oli see, et üksliikmete astendamisel jäeti arvuline kordaja astendamata (ca 16% analüüsitud töödes). Päris paljud korrutasid arvulise kordaja astendajaga: $(6a)^4 = 24a^4$. Järgmine sagedasem eksimus ilmnes sama astendajaga astmete korrutamisel: $(6a)^4 \cdot b^4 = (6ab)^8$.

Avaldise esimese liidetava lihtsustamisel eksiti veel sellega, et kahe algebralise murru korrutamisel laiendati mõlemat murdu teise nimetajaga või tehti vigu taandamisel (sagedamini jäeti muutuja a taandamata). Väga vähesed kasutasid kõige lihtsamat lahendusteed, kirjutades astmete korrutise asemele korrutise astme.

Kahe viimase liidetava teisendamisel oli vigade amplituud päris lai:

- $a^3 : a^{2,5}$ asemele saadi $a^{1,2}$ (astendajad jagati) või $\left(\frac{a}{a}\right)^{0,5}$ või kirjutati a^3 asemel $\sqrt[3]{a}$ või ei osatud üldse lihtsustada;
- $\left(a^{\frac{1}{12}}\right)^6$ asemele kirjutati kõige sagedamini $a^{\frac{1}{72}}, a^{\frac{6}{72}}, a^{6\frac{1}{12}}, 6a^{\frac{1}{12}}, a^{-12 \cdot 6}$ või $\left(\frac{1}{a^{12}}\right)^6$.

Mitmeid vigu esines tehete järjekorras, nt

- kõigepealt tehti avaldises liitmistehe ja alles seejärel lahutamistehe (lihtsustatud avaldises $16 - \sqrt{a} + \sqrt{a}$ liideti kõigepealt $\sqrt{a} + \sqrt{a}$ ja sellest jõuti erinevate vastusteni nagu nt $16 - 2\sqrt{a}, 16 - a^{\frac{1}{4}}, 16 - a$ või $16 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$.

³ Tärniga märgistatakse ühisosa ülesanded

- esimesest korrutisest lahutati a^3 ja seejärel asuti jagama.

Mitmeid lahendajaid ajas segadusse ülesande tekstis esitatud tingimus $a > 0$, millest lähtuvalt moodustati ka lihtsustatud avaldise jaoks võrratus (nt $16a^{0,5} > 0$ või $2 + a^3 > 0$) ja asuti seda lahendama. Mitmed võrdsustasid lihtsustatud avaldise 0ga ja üritasid võrrandist leida muutujate väärtusi.

Oli ka töid, milles omistati kohe algul muutujatele mingid arvulised väärtused (tavaliselt 1 ja 2) ja lihtsustati saadud arvavaldist.

Kokkuvõttes oli tegemist sobiva ülesandega, millega kontrolliti oluliste algebraoskuste valdamist. Selgus, et algebralise avaldise lihtsustamine valmistas suurele osale raskusi eeskätt astendamise osas. Kõige halvemini tulid sellega toime eesti soorituskeelega noormehed (lahendatus 33,1%). Et vältida astendamise reeglite segiajamist, võiks kordamisel pakkuda kõiki tehteid astmetega läbisegi ja lasta juurde kirjutada, millist valemit kasutatakse. Ülesanne oli suhteliselt hea selekteeriva võimega (eristusindeksi väärtus 0,42).

Ülesanne I-2 (5* punkti)

Joonestage koordinaatteljestikku sirged $y = \frac{1}{2}x + 2$ ja $x = 6$.

1. Viirutage kujund, mis on piiratud antud sirgete ja mõlema koordinaatteljega.
2. Arvutage viirutatud kujundi pindala.

See ülesanne pakkus lahendamiseks mitmeid võimalusi: kas ainult põhikooli või kitsa matemaatika III kursuse *Vektor tasandil*. Joone võrrand või hoopis kitsa matemaatika VII kursuse *Tasandilised kujundid*. Integraal teadmiste tuginedes. Ülesande koostajad pidasid ilmselt silmas viimast varianti. Lahendamiseks pidi eksaminand oskama võrrandi järgi sirgeid joonestada, määratlada tekstis kirjeldatud pinnatükki ja arvutada selle pindala (siin ongi võimalikud erinevad lahendusteed). Nendele oskustele lisandus ka sobivaima matemaatilise lahendusmudeli valik.

Ka see ülesanne kuulus oma lahendatusega 34,2% keskmiselt lahendatud ülesannete rühma. Eksaminandide soo järgi lahendustulemused oluliselt ei erinenud, väike paremus oli naistel. Eesti soorituskeelega eksaminandide tulemus oli oluliselt parem vene soorituskeelega eksaminandide omast.

Suhteliselt hästi osati joonestada sirget $y = \frac{1}{2}x + 2$. Siiski arvasid paljud eksaminandid, et see sirge läbib koordinaatide alguspunkti. Silma jäi, et sirge joonestamiseks kandis enamik eksaminande eelnevalt tabelisse rohkem kui nelja punkti koordinaadid (mõni isegi 13 punkti). Joonisele kantud punktide rohkusele vaatamata oli sirge sageli ikkagi ebatäpselt joonestatud. Domineerisid siiski korrektsed joonised. Kes jäi sirge $x = 6$ joonestamisega hätta, pidi oma lahenduse selles kohas lõpetama.

Päris palju eksimusi oli nõutava kujundi viirutamisel. Nimelt ei pandud tähele, et kujundit peavad piirama mõlemad koordinaatteljed. Viirutati kolmnurk, mida piirasid kaks antud sirget ja abstsissitelg.

Valdavalt lahendati ülesanne määratud integraali abil. Sel juhul esines eksimusi integreeritava avaldise moodustamisel (nt $(0,5x + 2) - 6$; $0,5x + 2 + 6$; $0,5x + 2 \cdot 6$). Päris paljud valisid aga lihtsama tee ja arvutasid pinnatüki pindala trapetsi pindala valemi abil või ristküliku ja kolmnurga pindalade summa kaudu. Nendel juhtudel oli mõnedes töodes selgitusi vähe ja lõikude pikkusi loeti jooniselt, kuid hindajad olid selles suhtes üsna heatahtlikud (kui joonis oli täpne). Sellele vaatamata oli teise alaülesande lahendatus vaid 25,2%.

Sagedamini esines järgmisi vigu:

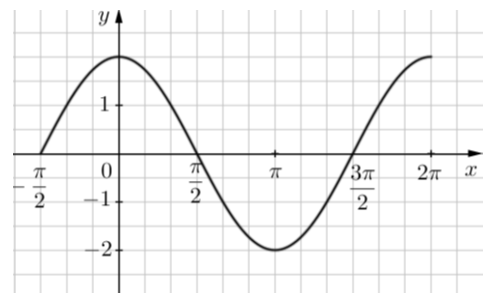
- joonestati vaid sirgel $y = \frac{1}{2}x + 2$ asuv lõik, mis jäi y -teljest paremale kuni lõikumiseni sirgega $x = 6$;
- sirge $x = 6$ asemel joonestati sirge $y = 6x$ või $y = 6$;
- vead integreerimisel, sagedasem neist arvust 2 integraali leidmisel;
- vead sümbolikas: integraali märgi all puudus sümbol dx või see oli alles ka pärast integreerimist;
- integreeritav avaldis või rajad olid valed, avaldis jäeti integreerimata ja rajad asendati sirge võrrandisse;
- vead trapetsi pindala valemis ($S = \frac{ab}{2} \cdot h$; $S = 2(a + b)$) ja kolmnurga pindala valemis ($S = \frac{abc}{2}$; $S = abc$).

Kokkuvõttes oli see suhteliselt hea eristusvõimega (0,42) ülesanne, mille lahendamiseks oli võimalik kasutada erinevaid teid. Kui eesmärgiks oli kontrollida pindala arvutamisel määratud integraali kasutamise oskust, siis võinuks pinnatükk olla ka mingi kõverjoonega piiratud.

Ülesanne I-3 (5 punkti)

Joonisel on funktsiooni $f(x) = 2 \cos x$ graafik lõigul $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

1. Leidke antud lõigul funktsiooni $f(x)$ negatiivsuspäikond ja graafiku miinimumpunkti koordinaadid.
2. Kas punkt $A\left(\frac{\pi}{3}; -1\right)$ asub funktsiooni $f(x)$ graafikul? Põhjendage oma vastust.



Ülesanne kuulus kitsa matemaatika II kursusesse *Trigonomeetria* ja V kursusesse *Funktsioonid I*. Selle lahendamiseks vajalikud teadmised-oskused olid trigonomeetrilise funktsiooni graafiku lugemine (negatiivsuspiirkonna leidmine, miinimumpunkti koordinaatide leidmine), tasandi punkti koordinaatide tähenduse tundmine ja oskus kontrollida, kas punkt *A* asus funktsiooni graafikul.

Kognitiivse taseme poolest oli antud ülesanne suhteliselt lihtne, nõudis teadmiste rakendamist standardses situatsioonis. Esimese küsimuse vastused olid joonise abil kergesti leitavad ja teisele küsimusele vastamiseks oli mitmeid erinevaid võimalusi.

Lahendatusega 48,2% osutus ülesande tulemus paremuselt kolmandaks. Eeskätt tuli see aga kanda 1. alaülesande vastuste arvele. Teise alaülesande lahendatus oli vaid 31,1%. Üks raskus seisnes selles, et oma jah/ei-vastust tuli matemaatiliselt põhjendada ja selleks polnud paljud suutelised, eeskätt terminoloogia mittevõltsamise tõttu. Üllatuslikult esines analüüsitud töodes kõige rohkem vigu mõiste *funktsiooni graafik* tõlgendamisel: graafiku all mõisteti kogu etteantud joonist. Punkt *A* kanti joonisele ja kuigi see ei asunud graafikul, anti ikkagi jaatav vastus. Mitmed kirjutasid, et $\frac{\pi}{3}$ asub ju etteantud lõigul. Korrektsete põhjenduste (punkti *A*

koordinaatide asendamine funktsiooni esitavasse valemisse, punkti kandmine joonisele, $\frac{\pi}{3}$ mittekuulumine negatiivsuspiirkonda) kõrval võis töodes leida ka selliseid põhjendusi: *ei asu, sest seda pole joonisele märgitud; ei asu, sest ei kuulu ei negatiivsus- ega positiivsuspiirkonda; ei asu, sest funktsiooni kordaja on positiivne; asub, sest graafik võib edasi minna lõpmatusse jne.*

Esimese alaülesande vastustes oli sagedamini järgmisi eksimusi:

- miinimumpunkti koordinaatideks anti $(\pi; 2)$;
- esitati vaid miinimumpunkti üks koordinaat (sagedamini $x_{\min} = \pi$ või vahetati koordinaatide järjekord ja kirjutati $(-2; \pi)$, eksiti sümbboolikas;
- ei tuntud negatiivsuspiirkonna mõistet, selleks peeti vahemikke $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ või $(0; 2)$;
- funktsiooni negatiivsuspiirkondi esitati ka väljastpoolt etteantud lõiku $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Tänavu oli trigonomeetrilise funktsiooni graafikuga seotud ülesannet lahendatud oluliselt paremini kui eelmisel aastal. Mullu ei kasutanud paljud eksaminandide lahenduses lisatud joonist, vaid valisid keerukama, st algebralise tee. Tänavu oli aga selliseid eksaminande oluliselt vähem kui eelmisel aastal. Ülesande eristusindeks 0,44 oli samuti hea. Meeldis see, et eksaminandid pidid oma vastust põhjendada. Nii sai ülevaate nende matemaatilisest väljendus- ja argumenteerimisoskusest. Veel tõi esmapilgul triviaalne küsimus *kas punkt asub funktsiooni graafikul?* välja tõsiasja, et graafiku mõistele, millega puututakse kokku erinevates klassides, tuleks tundides suuremat tähelepanu pöörata.

Ülesanne I-4 (5 punkti)

Karbis on rohelised ja punased pliiatsid, kokku 27 pliiatsit. Valides juhuslikult ühe pliiatsi, on punase pliiatsi saamise tõenäosus $\frac{4}{9}$.

1. Mitu punast ja mitu rohelist pliiatsit on karbis?
2. Arvutage järgmiste sündmuste tõenäosus:
 - 1) üks juhuslikult võetud pliiats on roheline;
 - 2) kaks juhuslikult võetud pliiatsit on mõlemad punased.

Ülesanne kuulus kitsa matemaatika IV kursusesse *Tõenäosus ja statistika*. Lahendamiseks pidi eksaminand tundma tõenäosuse mõistet, oskama arvutada sündmuse tõenäosust, kombinatsioonide arvu ja kahe teineteisest sõltuva sündmuse tõenäosust. Ka tehted harilike murdudega ja suhte väljendamine protsentides tuli kasutusele võtta. Kuigi tegu oli suhteliselt tavapärase ülesandega, nõudis igale küsimusele vastamine arutlemist ja pakkus erinevaid lahendusvõimalusi. Juba esimeses küsimuses oli esitatud nn pööratud olukord: antud oli sündmuse tõenäosus ja leida tuli soodsate võimaluste arv.

Ülesanne osutus ka sel aastal kõige paremini lahendatud ülesandeks (lahendatus 57,4%). Ülesande jättis lahendamata suhteliselt vähe eksaminande. Ühtmoodi hea tulemuse saavutasid nii naised kui ka mehed, eesti ja vene soorituskeelega eksaminandid ning erinevate koolitüüpide lõpetanud.

Enamik vastanutest tundis tõenäosuse mõistet. Kombinatsioonide arvu valem oli peaaegu kõigil õige, kuid eksiti selle rakendamisel.

Ootuspäraselt valmistas enim raskusi viimane alaülesanne (lahendatus 35,5%). Enamik leidis vastuse klassikalisele tõenäosuse definitsioonile tuginedes ($p = C_{12}^2 : C_{27}^2$), umbes üks viiendik aga tõenäosuste korrutamise reeglga ($p = \frac{12}{27} \cdot \frac{11}{26}$). Viimast esines rohkem eestikeelsetes töödes.

Sagedamini esines järgmisi vigu:

- raskused $\frac{4}{9}$ leidmisel 27st; tekkisid sellised pliiatsite arvud, nagu 26,25 või 11,88 ja need loeti sobivateks;
- viimases alaülesandes saadi vastuseks $C_{12}^2 : 27$; $C_{27}^2 : C_{27}^{12}$; $(C_{12}^1 + C_{12}^1) : C_{27}^2$; $(C_{12}^1 \cdot C_{12}^1) : C_{27}^2$;
- viimases alaülesandes saadi vastuseks $\frac{12}{27} \cdot \frac{12}{26}$; $\frac{12}{27} \cdot \frac{11}{27}$; $\frac{12}{27} + \frac{11}{26}$; $2 \cdot \frac{4}{9}$; $\frac{4}{9} : 2$; $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$;
- ei tehtud vahet märkidel = ja $\approx$, nt kirjutati $\frac{22}{117} = 0,188$.

Kokkuvõttes oli see jõukohane ja kõrgeima eristusvõimega (0,65) rakendusülesanne, mille lahendamiseks oli võimalik kasutada erinevaid teid. Samas oli selle ülesande tulemus kõige nõrgemini seotud kogu töö tulemusega (korrelatsioonikordaja 0,59).

Tundus, et lahenduste lehel oli liiga vähe ruumi, paljudel jätkus lahendus lisalehel.

Ülesanne I-5 (10 punkti)

Lahendage võrratusesüsteem

$$\begin{cases} 5 - 2x < x - |2 - 5| \\ \frac{3x - 3}{6} \leq 4 - \frac{x + 1}{2} \end{cases}$$

ja leidke selle võrratusesüsteemi kõik täisarvulised lahendid.

Ülesande lahendamiseks vajalikud oskused omandatakse kitsa matemaatika I kursuses *Arvuhulgad. Avaldised. Võrrandid ja võrratused*. Lahendamiseks pidi eksaminand oskama leida arvu absoluutväärtust, lihtsustada algebralisi täisavaldisi (sulgude avamine, koondamine, arvuliste nimetajatega murdude ühisele nimetajale viimine), rakendama võrratuse põhiomadusi ja oskama lahendada lineaarvõrratusesüsteemi. Veel tuli osata saadud lahendihulgast eraldada täisarvulised lahendid. Ülesanne oli suhteliselt tavapärane ja algoritmiline, sellega sai kontrollida suure hulga algebraoskuste valdamist.

Lahendatuse (31,2%) järgi kuulus ülesanne keskmise kolmandiku lõppu. Naiste tulemus ületas oluliselt meeste oma, vene soorituskeelega eksaminandide tulemus eesti soorituskeelega eksaminandide oma. Detailsem analüüs näitas, et eesti ja vene soorituskeelega naiste tulemused ei erine teineteisest oluliselt. Küll aga oli kõigist teistest oluliselt madalam eesti soorituskeelega noormeeste tulemus (23,3%). Koolitüübi järgi oli antud ülesande tulemus väga madal kutseõppe lõpetanutel (9,6%).

Arvestatav osa eksaminandidest jättis ülesande lahendamata, nendele lisandus veel umbes sama palju 0-punktiseid lahendusi (analüüsitud tööde seas oli selliseid kokku ca 24%). Paremini tunti võrratusesüsteemi lahendamise tehnikat, enim eksimusi oli täisavaldiste lihtsustamise vallas. Esimese võrratuse puhul sai kõige suuremaks komistuskiviks absoluutväärtuse $-|2 - 5|$ leidmine. Suur hulk käsitas absoluutväärtuse märke nagu ümarsulge ja sai vastuseks $-2 + 5$, sageduselt järgnesid sellele vastused $-2 - 5$; $2 + 5$; $2 - 5$.

Teise võrratuse lahendamisel ilmnas kaks sagedasemat viga: sulgude avamine, kui sulgude ees on miinusmärk (nt $-3(x+1) = -3x+3$) ja nimetajatest vabanemisel sobivate laiendajate leidmine (nt võrratuse poolte korrutamisel 12ga korrutati täisarvu 4 3ga).

Kõige madalam oli küsimuse *leidke selle võrratusesüsteemi kõik täisarvulised lahendid* lahendatus (12,3%). Sellele küsimusele jäeti kas üldse vastamata või esitati valesid täisarve nt poollõigu $\left(2\frac{2}{3}; 4\right]$ korral ka täisarv 2. Hindamisjuhendi kohaselt sai vales lahendihulgast õigesti leitud täisarvude eest 1 punkti vaid siis, kui seal sisaldus üks õige täisarv.

Sagedamini esines järgmisi vigu:

- võrratuse poolte korrutamisel arvuga märgiti püstkriipsu järele hoopis jagamine selle arvuga;
- mõlema võrratuse lahenditest ei osatud välja kirjutada võrratusesüsteemi lahendit (ei tehtud joonist või kanti lahendite piirkonnad sellele valesti või leiti lahendihulkade ühisosa asemel ühend);
- võrratuse poolte korrutamisel negatiivse arvuga jäeti võrratuse märk muutmata;
- vead üksliikmete liitmisel (nt $-2x - x = -x$; $-x - 2x = -2x^2$; $5 - 2x = 3x$);
- kui lugejas või nimetajas oli kakslige, siis taandamisvead;
- võrratused asendati võrranditega.

Kokkuvõttes pakkus see ülesanne võimalusi erinevate vigade tekkeks. Kitsast matemaatika kursust õppinutele tekitasid raskusi absoluutväärtus ja põhikoolis õpitud algebralised teisendused. Ülesande diferentseeriv väärtus osutus suhteliselt madalaks (eristusindeks 0,19) ja ei eristanud hästi just nõrgemate tulemustega eksaminande.

Ülesanne I-6 (5 + 5* punkti)

Lahendage võrrandid

1. $9^{x+2} - \frac{1}{27} = 0$

2. $\log x^2 = \log 2 + \log(x + 4)$.

Ülesanne kuulus kitsa matemaatika V kursusesse *Funktsioonid I*. Lahendamiseks pidid eksaminandid teadma astmete võrdsuse tingimust, oskama sooritada tehteid astmetega, tundma logaritmi omadusi, eksponent- ja logaritmivõrrandi lahendamise meetodeid, samuti oskama lahendada lineaar- ja ruutvõrrandit ning oskama valida sobiva lahendusmeetodi.

Ülesande keskmine lahendatus oli vaid 27,9%. Eksponentvõrrandit lahendati küll paremini kui logaritmivõrrandit (lahendatused vastavalt 31,2% ja 24,7%), kuid siiski oli mõlema võrrandi korral vastamata jätnute ja 0-punktiste tööde osakaal suur. Naiste tulemus ületas oluliselt meeste tulemust ja vene soorituskeelega eksaminandide tulemus oluliselt eesti soorituskeelega eksaminandide oma (lahendatused vastavalt 24,6% ja 39,2%). Taas oli madalaim eesti soorituskeelega meeste tulemus (18,8%). Väga madal oli kutseõppe lõpetanute tulemus (4,5%).

Analoogne ülesanne oli ka eelmise aasta eksamil ja sagedasemad veadki olid peaaegu samad.

Eelmise aasta võrrandi $a^{f(x)} = b$ asemel oli tänavu võrrand kujul $a^{f(x)} - b = 0$. Teisendatud võrrandist $3^{2x+4} - 3^{-3} = 0$ kirjutati ilma igasuguste selgitusteta edasi, et $2x + 4 - (-3) = 0$ (umbes 20% eksaminandidest, põhiliselt eesti soorituskeelega). See on küll õige, kuid jäeti põhjendamata, mille põhjal see saadi (nt kas ühesuguse alusega astmete võrdsuse tõttu või oleks nt võrrandist $3^{2x+4} - 3^{-3} = 3^2$ järeldatud, et $2x + 4 - (-3) = 2$. Venekeelsetes töödes oli

peaaegu kõigil viidud võrrand eelnevalt kujule $3^{2x+4} = 3^{-3}$. Palju eksiti ka astendamise reeglite rakendamisel.

Teise võrrandi lahendamisel oli taas kõige sagedasem viga see, et sümbol $\log$ jäeti lihtsalt ära ja saadi võrrand $x^2 = 2 + x + 4$. Mõned eksaminandid olid selle sümboli läbi kriipsutanud, mõned kirjutanud paremale püstkriipsu järele $: \log$. See näitab, et logaritmi mõiste ja logaritmade omadused ei ole sisuliselt omandatud. Teine, sage viga oli see, et logaritmivõrrandi lahendit -2 peeti ilma kontrollimiseta võõrlahendiks (enamik lisas, et negatiivsest arvust ei saa logaritmi leida).

Sagedamini esines järgmisi vigu:

- $\frac{1}{27}$ teisendati kujule $3^3; 9^{-3}; 3^{-9}; 9^{-\frac{1}{3}}$ või $\left(\frac{27}{1}\right)^{-1} = -27$;
- eksponentvõrrandis võrdsustati astendajad, kuigi alused on erinevad;
- eksponentvõrrandi lahend leiti taskuarvuti abil või katsetamise teel;
- valemite mittetundmine (nt $a^{b+c} = a^b + a^c$ või $\log(a+b) = \log a + \log b$);
- puudus logaritmivõrrandi lahendite kontroll (siin ei piisanud väitest *kontrollisin suuliselt*);
- vead ruutvõrrandi lahendamisel.

Kahe aasta kokkuvõttes võib nentida, et eksponent- ja logaritmivõrrandi lahendamise oskus ei ole eriti paranenud. Mõlemal aastal ilmnes astendamise ja logaritmime omaduste halb tundmine. Tööstest võis näha eesti ja vene soorituskeelega eksaminandide taseme ja ka õpetamismetoodika erinevust. Eksponentvõrrandi juures oli sellest juba juttu. Logaritmivõrrandi puhul seisnes metoodika erinevus selles, et lahendite kontrolliks leiti mõnedes venekeelsetes töödes võrrandi määramispiirkond $X = (-4; 0) \cup (0; \infty)$ ja näidati, et mõlemad lahendid kuuluvad sellesse piirkonda.

Eelmise aasta tööde analüüsis osutati, et võõrlahendi tekke võimalusega võrrandite korral on vajalik ülesande lõppu kirjutada korralik vastus. Tänavu tegi seda palju enam eksaminande, aga mitte kõik.

Ülesanne oli ühtmoodi halvasti lahendatud just madalama tulemuse saanud eksaminandidel ja diferentseeris eeskätt tugevamaid. Ülesande eristusindeks oli vaid 0,15.

Ülesanne I-7 (10* punkti)

Õpilane Juhan joonestas GeoGebra arvutiprogrammi abil võrdhaarse kolmnurga ABC. Kolmnurga haar BC oli pikkusega 10 cm ja tipunurk ACB oli 64° . Juhan joonestas haarale BC kõrguse, mis jaotas kolmnurga ABC kaheks osaks: kolmnurkadeks ABD ja ACD. Juhanile näis, et kolmnurga ABD pindala oli 2 korda suurem kui kolmnurga ACD pindala. Arvutage kolmnurkade ABD ja ACD pindalad ning otsustage, kas Juhanil oli õigus.

Ülesanne kuulus kitsa matemaatika II kursusesse *Trigonomeetria*. Eksaminand pidi oskama skitseerida etteantud kolmnurga ja kanda teksti põhjal õiged andmed joonisele, tundma

võrdhaarse kolmnurga elementide nimetusi ja omadusi ning oskama lahendada täisnurkset kolmnurka. Kõige olulisem oli selle ülesande puhul oskus valida sobiv mitmeetapiline matemaatiline mudel.

Oma keskmise lahendatuse (28,0%) poolest kuulus ülesanne halvemini lahendatud ülesannete kolmandikku. Naistel oli tulemus mõnevõrra parem kui meestel (vastavad keskmised 29,1% ja 26,1%, erinevus pole statistiliselt oluline). Eesti soorituskeelega eksaminandid saavutasid aga vene soorituskeelega eksaminandidest oluliselt parema tulemuse (30,6% ja 26,0%) ja selle ülesande tulemus oli hea ka eesti soorituskeelega meestel.

Tegemist oli hea rakendusülesandega, mida võis lahendada väga mitmel erineval viisil (täisnurkse kolmnurga trigonomeetria, siinusteoreem, koosinusteoreem, Heroni valem jne), aga see nõudis kõigepealt otstarbeka mudeli valikut. Peaaegu kõik asusid ülesannet lahendama. Mitmetel piirdus lahendus õige joonise ja nurkade leidmisega (edasiseks lahenduseks puudus idee). Üllatuslikult osutus paljudele eksaminandidele antud ülesandes komistuskiviks võrdhaarse kolmnurga omaduste ja elementide nimetuste ebapiisav tundmine. Mitmed (analüüsitud töödest ca 15%) märkisid 64° tipunurga joonisel hoopis alusnurgaks ja/või eeldasid, et kõrgus poolitab haara BC (ei seganud ka see, et joonisel polnud kõrgus ilmselgelt alusega risti). Sel juhul nurjus kogu järgnev lahenduskäik.

Sagedamini esines järgmisi vigu:

- lahenduses ei kasutatud joonisele märgitud lõikude või nurkade tähiseid;
- kõrgus joonestati mitte haarale BC , vaid alusele AC ;
- Pythagorase teoreemi rakendati mis tahes kolmnurgas;
- ei teatud teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide definitsioone (nt kirjutati $\sin \alpha$, aga tegelikult esitas jagatis hoopis selle nurga koosinust);
- üksikud eksimused kolmnurga pindala valemitega.

Kuigi ülesannet oli võimalik lahendada ka ainult põhikoolis omandatud täisnurkse kolmnurga trigonomeetria abil, osutus tulemus kesiseks. Sellel oli kaks peamist põhjust: suutmatus välja töötada lahendusmudelit ja vale joonise tegemine võrdhaarse kolmnurga omaduste mittetundmise tõttu. Mõistlik olnuks ülesande tekstis ette anda pindalade vastuste täpsus.

Ülesanne diferentseeris tegijaid hästi tulemuste keskmises ja ülemises osas, vastava eristusindeksi väärtus oli 0,40. Õpetamisel tuleks õpilasi suunata oma lahendustes kasutama joonistel olevaid tähiseid.

Ülesanne II-1 (5 + 5* punkti)

1. Arvutage funktsiooni $f(x) = x^2 - 2x - 3$ nullkohad ja graafiku haripunkti koordinaadid ning konstrueerige funktsiooni graafik.
2. On antud funktsioon $g(x) = 1,5x^2 - 0,5x^3$. Arvutage selle funktsiooni ekstreemumkohad ja leidke kasvamisvahemik.

Ülesanne kuulus kitsa matemaatika kursustesse *Funktsioonid I* ja *Funktsioonid II*. Selle ülesande lahendamiseks tuli tunda parabooli haripunkti, funktsiooni nullkohtade,

ekstreemumkoha ja kasvamisvahemiku mõistet ning osata neid kõiki ka leida. Selleks tuli lahendada ruutvõrrandit ja ruutvõrratust, leida astmefunktsiooni tuletist ja arvutada funktsiooni väärtust etteantud kohal.

Tulemuse järgi kuulus ülesanne paremini lahendatud ülesannete hulka (lahendatus 46,2%). Tegemist oli tüüpilise funktsiooni uurimise ülesandega, mida peaaegu kõik asusid lahendama. Naiste tulemus ületas oluliselt meeste oma (keskmised 50,6% ja 38,3%), samuti vene soorituskeelega eksaminandide tulemus eesti soorituskeelega eksaminandide oma (44,5% ja 52,0%).

Esimeses alaülesandes oleva ruutfunktsiooni uurimiseks piisas põhikooli teadmistest ja sellega tuldi paremini toime (lahendatus 52,8%). Parabooli nullkohtade leidmine erilisi raskusi ei valmistanud. Mitmed aga lõpetasid sellega ülesande lahendamise. Haripunkti x -koordinaati osati leida, aga esitamata jäeti y -koordinaat. Kõige rohkem eksimusi oli graafiku joonestamisel. Leidus üksikuid sirgeid ja hüperboole, hulgaliselt võis aga näha ebatäpseid parabooli (terava „tipuga“, ebasümmeetrilisi, allapoole avanevaid, kitsamaid või laiemaid, aga ka ainult positiivsus- ja negatiivsuspiirkonda märkivaid abijooni jne). Nõue *konstrueerige* eeldas suuremat täpsust ja enam kui kolme graafikul asuva punkti kasutamist. Jäi mulje, et graafik joonestati kohe pärast nullkohtade leidmist ja haripunkti koordinaadid loeti sealt.

Kuupfunktsiooni juures osutus kõige keerukamaks ekstreemumkohtade ja kasvamisvahemiku leidmine (lahendatus 27,6%). Põhiline viga oli selles, et pärast võrrandi $g'(x) = 0$ lahendamist jäeti kontrollimata, kas saadud kohtadel on ikka tegemist ekstreemumitega. Mitmed olid kasvamisvahemiku küll kirja pannud, kuid puudusid igasugused selgitused ja/või joonis selle leidmise kohta. Päris palju vigu oli kasvamisvahemiku leidmiseks koostatud ruutvõrratuse lahendamisel. Ei arvestatud seda, et ruutliikme kordaja oli negatiivne ja skitseeriti vale abijoon.

Analoogiliselt eelmise aastaga jäi ka tänavu silma, et eksami teise osa alguses esines lahendustes rohkem arvutus- ja hooletusvigu. Ka ülesande teksti ei loetud hoolikalt, nt 1. alaülesandes leiti nullkohad, aga haripunkti koordinaadid jäeti leidmata. Päris palju elementaarseid eksimusi esines võrrandite lahendamisel.

Sagedamini esines järgmisi vigu:

- eksimused sümboolika kasutamisel, nt $x_0 = (3; -1)$, $X \uparrow = \{0; 2\}$;
- kuigi funktsiooni $g(x)$ graafiku joonestamist ei nõutud, olid mitmed seda siiski üritanud teha ja seejuures eksinud (ei arvestatud, et 0 oli kahekordne nullkoht, kasutusele võeti ka $f(x)$ nullkohad, joonistati parabool);
- skitseeriti $g(x)$ graafik õigete nullkohtadega (aga ilma ekstreemumkohti leidmata) ja püüti sellelt välja lugeda kasvamisvahemikku.

Kokkuvõttes oli see mitmeid erinevaid ja olulisi oskusi (algebra + funktsiooni uurimine) integreeriv ülesanne. Mõnesid lahendajaid ajas segadusse asjaolu, et alaülesannetes oli tegemist kahe erineva funktsiooniga. Samasse teljestikku püüti skitseerida mõlemaid

graafikuid ja vastata küsimustele nende abil. Ülesande diferentseeriv võime oli suhteliselt madal just tulemuste pingerea keskmises osas (eristusindeksi väärtus 0,22).

Ülesanne II-2 (10 punkti)

Kolmnurga ABC tippude koordinaadid on $A(-4; 2)$, $B(2; -4)$ ja $C(8; 4)$.

1. Joonestage kolmnurk ABC koordinaattasandile.
2. Koostage sirge AB võrrand.
3. Koostage võrrand sirgele, kui sirge läbib kolmnurga külje AC keskpunkti M ning on paralleelne kolmnurga küljega AB . Joonestage see sirge.

Ülesanne kuulus kitsa matemaatika III kursusesse *Vektor tasandil*. Joone võrrand. Lahendamiseks oli vaja tunda tasandilise punkti koordinaatide mõistet ja osata selliselt esitatud punkte kujutada koordinaattasandil, leida lõigu keskpunkti koordinaate, koostada sirge võrrandit kahe punkti ning punkti ja tõusu (või punkti ja sihivektori) abil, teada ja rakendada paralleelsete sirgete tõusude omadust ning joonestada võrrandiga esitatud sirget. Sõltuvalt valitud lahendustest tuli veel rakendada kolmnurga kesklõigu omadusi.

Kogu eksamitöö lõikes saadi ülesande lahendamisel paremuselt teine tulemus (lahendus 50,3%). Peaaegu kõik asusid ülesannet lahendama. Kõrge tulemus saavutati eeskätt tänu esimese alaülesande heale lahendamisioskusele (alaülesannete lahendatused 93,9%, 33,8% ja 30,8%). Hulgaliselt oli piisavate selgitustega ja korrektselt vormistatud lahendusi. Naiste tulemus osutus taas oluliselt paremaks meeste omast (53,5% ja 44,5%). Soorituskeeles lõikes olulisi erinevusi ei olnud (eesti – 49,9%, vene – 51,6%), ülesande teine osa oli vene õppekeelela eksaminandidel mõnevõrra paremini lahendatud.

Kognitiivselt tasemelt olid ülesande kõik alaülesanded suhteliselt lihtsad, teadmisi tuli rakendada tüüpsituatsioonis. Muidugi oli vaja läbi mõelda, mis sirge võrrand oli kõige otstarbekam koostada ja mis suurusi selleks eelnevalt leida tuli.

Suhteliselt hästi osati etteantud punkte kanda koordinaattasandile. Vähem eksisid need, kes kolmandas alaülesandes koostasid sirge võrrandi tõusu ja punkti abil. Enim eksimusi tekkis aga juhul, kui sirge võrrand koostati kolmnurga kahe külje keskpunktide järgi. Väga paljud leidsid külje BC keskpunkti koordinaadid jooniselt ja jätsid põhjendamata, miks neid keskpunkte läbiv sirge oli sirgega AB paralleelne. Paljudel juhtudel piirduti vastava kolmnurga ja punkti M läbiva sirge joonestamisega (ilma et oleks selle võrrandit koostatud). Täpse joonise korral lõikas sirge x -telge kohal 5 ja sealt edasi oli lihtne sirge võrrandit koostada.

Ka selle ülesande lahendustes oli suhteliselt palju elementaarseid märgi- ja arvutusvigu.

Sagedamini esines järgmisi vigu:

- ei joonestatud sirgega AB paralleelset sirget, vaid ainult sellel sirgel asuv kolmnurga kesklõik;
- sirge võrrandi üldkuju oli vale (nt $\frac{x - x_1}{x_2 - y_2} = \frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_2}$);
- kolmnurga tipud kanti joonisele valesti;

- punkt *M* oli märgitud küljele *BC*.

Kokkuvõttes lahendati analüütilise geomeetria ülesannet sel aastal oluliselt paremini kui eelmisel, sest tänavu oli tegu vaid sirge võrranditega (mullu ringjoone võrrand). Ülesanne oli igati jõukohane ja selgitas välja, kes suudab geomeetrilisi kujundeid kirjeldada ka algebraliste vahenditega ja kes oskab neid vaid joonestada. Eristusindeksi väärtus 0,27 pole küll eriti kõrge (siiski kõrgeim II osa ülesannete seas), kuid eristab kõige paremini eksaminande skaala ülemises tipus.

Ülesanne II-3 (10* punkti)

Perekond Kuusk jälgis 2013. aasta 1. jaanuarist 2014. aasta 31. detsembrini, kui palju kulus neil raha toidukaupade ostmiseks. Selgus, et vaadeldud perioodil kulus perel igas kuus ühe ja sama summa võrra rohkem raha kui eelmises kuus.

1. 2013. aasta esimesel kahel kuul kulus perel toidukaupade ostmiseks kokku 672,5 eurot ja 2014. aasta märtsis 370 eurot. Kui palju raha kulus perel toidukaupade ostmiseks 2014. aasta detsembris?
2. Mitu eurot kulus perel vaadeldud perioodil toidukaupade ostmiseks keskmiselt ühes kuus?
3. Mitme protsendi võrra oli 2014. aasta detsembrikuu kulu suurem 2013. aasta jaanuarikuu kulust?

Ülesanne kuulus kitsa matemaatika VI kursusesse *Funktsioonid II*, sest esimeses alaülesandes oli mõistlik kasutada aritmeetilist jada ja selle üldliikme valemit. Selle ülesande lahendamiseks vajaminevad põhiteadmised oli eksaminand pidanud (suures osas) omandama juba põhikoolis ja gümnaasiumi I kursuses *Arvuhulgad. Avaldised. Võrrandid ja võrratused*: teksti põhjal kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemi koostamine ja selle lahendamine, aritmeetilise keskmise leidmine ja protsentarvutus. Väga oluline oli pikast tekstist vajaliku info leidmise oskus.

Ülesanne osutus küllalt keerukaks (lahendatus 29,7%) ja kuulus halvemini lahendatud ülesannete kolmandikku. Maksimumpunkte said ülesande eest vaid vähesed, suur hulk ei asunudki ülesannet lahendama. Alaülesannete lahendatused olid 33,8%, 27,1% ja 19,9%. Selle ülesande puhul ei olnud gümnaasiumi päevase õppe lõpetanute tulemus (32,1%) teistest väga palju kõrgem. Kutseõppe lõpetanute rühmas oli aga ülesanne oma lahendatuse järgi paremuselt kolmandal kohal.

Naiste ja meeste tulemused (29,7% ja 29,5%) teineteisest ei erinenud. Sama kehtib ka eesti ja vene soorituskeelte lõikes (29,6% ja 29,7%).

Väga paljud ei osanud esimese alaülesande juures leida sobivat matemaatilist mudelit ja ülesannet asuti lahendama aritmeetilist jada kasutamata. Üldjuhul toimiti järgmiselt:

$672,5 : 2 = 336,25$ (€); $370 - 336,25 = 33,75$ (€) ja viimane tulemus võetigi igakuiseks juurdekasvuks. Nagu näha, ei lugenud need eksaminandid teksti hoolikalt ega märganud, et 370 eurot oli järgmise aasta näitaja. Palju oli neid, kes küll tajusid aritmeetilist jada, kuid ei mäletanud vastavaid valemid ja leidsid igakuise juurdekasvu katsetamise teel. Teise alaülesande lahendamiseks oli idee enamikul olemas, kuid takistuseks sai jada üldliikme valemi mitteteadmine. Kirjutati vaid, et vastuse leidmiseks tuleb 24 kuu kulud liita ja jagada

tulemus 24ga. Kolmanda alaülesande juures oli erinevaid eksimusi. Kõige sagedamini võeti 100%-ks detsembrikuu kulu või võrreldi valesid suurusi.

Sagedamini esines järgmisi vigu:

- jada üldliikme valem oli vigane (nt $a_n = a_1(n-1) \cdot d$; $a_n = a_1 + (1-n) \cdot d$; $a_n = a_1 - (n-1) \cdot d$);
- kirjutati geomeetrilise jada või aritmeetilise ja geomeetrilise jada valemeid ja sümboleid koos, nt $d = \frac{a_2}{a_1}$;
- teisele küsimusele vastamisel võeti $n = 12$;
- valemite aeti segamini jada summa ja üldliikme tähised;
- puudus kriitiline suhtumine ebareaalsetesse vastustesse, nt *kuus kulus toidule 2319 eurot, detsembrikuu kulu on 1400% suurem jaanuariku kulu* jt.

Tulemust arvestades tuleb seda rakenduslikku ja mitmeid teemasid integreerivat ülesannet pidada kitsa matemaatika eksami tegijatele suhteliselt raskeks. Põhjus oli suutmatuses koostada vastavat mudelit ja/või aritmeetilise jada omaduste ja protsentarvutuse ebapiisav tundmine. Lahendustes oodanuks paljudelt arvutuste juurde põhjalikumaid selgitusi, sh ka kasutatavate tundmatute sisu selgitusi.

Ülesande eristusindeks 0,13 oli madal. Samas diferentseeris ülesanne hästi neid eksaminande, kes saavutasid keskmisest kõrgema tulemuse ja kelle arutlemisoskus oli hea. Selliseid ülesandeid peab eksamitöös ikka mõni olema.

Ülesanne II-4 (10* punkti)

1. Kui suure rasvasisaldusega koor saadi, kui segati 200 ml 10% rasvasisaldusega koort ja 300 ml 35% rasvasisaldusega koort?

2. Kui palju tuleb võtta 10% rasvasisaldusega koort ja kui palju 35% rasvasisaldusega koort, et nende segamise tulemusena saada 1000 ml 20% rasvasisaldusega koort?

Tegemist oli elulise ülesandega protsentarvutuse vallast. Gümnaasiumi kitsa matemaatika kursuse ainekava otseselt protsentarvutust ei sisalda. Teises alaülesandes leidis kasutust vaid I kursuse *Arvuhulgad. Avaldised. Võrrandid ja võrratused* pädevus lahendab lihtsamaid, sh tegelikkusest tulenevaid tekstülesandeid võrrandite ja võrrandisüsteemide abil. Lahendamiseks oli vaja tunda protsendi mõistet, osata leida protsenti etteantud arvust, arvutada suuruse kasvamist protsentides, koostada teksti põhjal lineaarvõrrandit, lahendada lineaarvõrrandisüsteemi ja muidugi sobiva lahendusmudeli koostamiseks saada aru tekstis esitatud andmete vahelistest seostest.

Ülesanne osutus kogu eksamitöö kõige halvemini lahendatud ülesandeks. Lahendatus oli vaid 21,6% ja maksimumtulemuse saavutasid vähesed. Samas oli see ainus ülesanne, mille korral meeste tulemus oli oluliselt kõrgem naiste omast (keskmised vastavalt 25,3% ja 19,5%). Vene

soorituskeelega eksaminandide tulemus (28,7%) oli oluliselt kõrgem eesti soorituskeelega eksaminandide omast (19,4%).

Madala tulemuse põhjustas eeskätt teine alaülesanne, mille keskmine lahendus oli vaid 9,6% (esimesel aga 33,6%). Väga paljud olid teise alaülesande lahendamisest loobunud. Põhiraskus oli arvatavasti sama, mis eelmisel aastal: protsentravutus tuli viia kokku muutujaid sisaldavate avaldiste ja võrrandisüsteemi koostamisega. Ka mullu osutus analoogne ülesanne eksamitöö keerukaimaks (lahendus 17,1%). Võrreldes põhikooli õpikutes kasutatavaid protsentravutuse meetodeid eksamitöös esitatuga tundub, et viimastes on toetunud pigem keemias laialdaselt rakendatavale võrde meetodile, mida matemaatikaõpikutes protsentravutuse õppimise juures peaaegu üldse ei kasutata. Eksamitöödest võis hulgaliselt leida sisult valesid võrdeid, nt $\frac{200}{300} = \frac{10}{35}$ või $\frac{200}{10\%} = \frac{300}{35\%}$ (neist esimene saadi teineteise alla kirjutatud seostest 200 ml 10% koort ja 300 ml 35% koort). Sageli puudusid kirjutatud võrrete juures ka selgitused.

Kuna paljud ei taibanud teises alaülesandes koostada võrrandisüsteemi (või võrrandit), siis katsetati arvudega ja tehti mõttetu tehteid. Hulgaliselt leidsid töid, milles olid ilma arvutusteta kõigepealt esitatud õiged vastused (600 ml ja 400 ml) ja seejärel arvutustega näidatud, et nende koguste segamisel saadakse 20% koor. Võib-olla juhtis neid eksaminande vastuseni tõsiasi, et esimeses alaülesandes oli samuti koorte koguste suhe 2 : 3.

Sagedamini esines järgmisi vigu:

- kasutatud muutujate tähised jäeti selgitamata või anti ebapiisav selgitus, nt *olgu 10% on x ja 35% on y*;
- teises alaülesandes võeti kasutusele kaks muutujat, kuid koostati vaid üks võrrand $0,1x + 0,35y = 200$, teine, st lihtsam võrrand $x + y = 1000$ jäeti koostamata (või koostati mõlemad võrrandid, kuid neist ei moodustatud süsteemi);
- mõlema koore kogus tähistati sama muutujaga x ;
- esimeses alaülesandes arvutati saadud koore rasvasisaldus liitmistehetega $10\% + 35\% = 45\%$ või leiti 10% ja 35% aritmeetiline keskmine;
- ei saadud aru, mida tähendab nt 10% rasvasisaldus.

Kokkuvõttes kontrollis ülesanne eluks väga olulise protsentravutuse oskust. Tulemus näitas, et see oskus ei ole eriti hea ühegi koolitüübi lõpetajatel. Võiks kaaluda põhikoolis õpitust mõnevõrra keerukama protsentravutuse lülitamist gümnaasiumi ainekavasse. Edaspidi oleks soovitatav analoogilistes ülesannetes kirjeldada aine kogust ruumala asemel massiga, sest paljudel juhtudel muutub ainete segamisel oluliselt ka tihedus. Eristusindeks oli siin kõigi ülesannete lõikes madalaim (0,12), väga halvasti diferentseeris just teine alaülesanne. Hästi eristas ülesanne vaid kõrge tulemusega eksaminande.

Ülesanne II-5 (10 punkti)

Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on 10 cm ja põhitahu diagonaal on 12 cm.

1. *Tehke ülesande tekstiga sobiv joonis.*

2. Arvutage püramiidi ruumala ning nurk külgtahu ja põhitahu vahel.

Ülesanne kuulus kitsa matemaatika viimasesse kursusesse *Stereomeetria*, kuid vajas teadmisi ka eelnevast kursusest *Tasandilised kujundid. Integraal*. Ülesande lahendamiseks pidi eksaminand tundma korrapärase püramiidi mõistet ja omadusi, samuti püramiidi elementide nimetusi (põhitahk, külgtahk, diagonaal, kahe tahu vaheline nurk). Etteantud omaduste ja andmete põhjal tuli skitseerida püramiid ja arvutada selle ruumala. Veel oli tarvis arvutada kahetahulise nurga suurus. Muidugi oli vaja ka ruumikujutluse võimet. Tulemuse poolest kuulus ülesanne keskmisse kolmandikku (keskmine lahendatus 43,5%). Naised lahendasid ülesannet meestest oluliselt paremini (vastavad keskmised 44,5% ja 41,8%), kuid see erinevus ei olnud nii suur kui mitmete algebraülesannete korral. Eesti soorituskeelega eksaminandide tulemus oli oluliselt kõrgem vene soorituskeelega eksaminandide omast (44,3% ja 40,8%). Kõige madalam tulemus oli vene soorituskeelega meestel (39,7%).

Eelmise aasta eksamitöödest selgus, et päris mitmetel puudus stereomeetriaülesande lahenduses üldse joonis. Tänavu suunas esimene alaülesanne kõiki joonist tegema. Taas selgus, et enamikul puudusid selleks vajalikud oskused. Lahenduste lehe oli suur otsevaates ruut või ristkülik, mille juurde olid kuidagi sobitatud püramiidi külgtahud. Sageli sattus püramiidi kõrguse aluspunkt põhiservale. Ometi nõuab kitsa kursuse ainekava pädevust *õpilane kujutab tasandil ruumilisi kujundeid ning nende lihtsamaid tasandilisi lõikeid*.

Samas selgus, et püramiidi mõistet teati, sest püramiidist erinevaid kehi peaaegu ei esinenudki. Kui oli joonestatud nelinurkse põhjaga püramiid, mille kõrgus langes põhja diagonaalide lõikepunkti, anti selle eest juba punkte. Nii kujunes esimese alaülesande keskmiseks lahendatuseks 79,4%. Mitmetel piirduski lahendus vaid joonisega.

Teise alaülesande lahendatus oli palju madalam, vaid 28,2%. Selle peamine põhjus oli külgtahu ja põhitahu vahelise nurga valesti kujutamine: nõutud kahetahulise nurga asemel kanti joonisele külgserva ja põhitahu vaheline nurk (analüüsitud tööde seas oli selliseid 25%), harvemini külgserva ja põhiserva vaheline nurk. Püramiidi ruumala leidmine õnnestus paremini. Siiski leidis hulgaliselt vigaseid ruumala valemeid, milles põhja pindala ja kõrguse korrutise ees olev kordaja varieerus või kasutati hoopis mingeid pindala valemeid: nt $S = \pi r m$; $S = S_p + 4S_k$. Veel jäi silma see, et nii põhja pindala kui ka nurga leidmiseks valiti sageli mõttetult keerukas tee (siinusteoreem, koosinusteoreem jne), mis tõi kaasa ka eksimusi.

Sagedamini esines järgmisi vigu:

- korrapäraseks nelinurgaks peeti rombi;
- ei teatud teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide definitsioone, nt kirjutati $\cos \alpha$, kuigi arvutati hoopis selle nurga tangensit;
- tähised lahenduses ja joonisel ei ühtinud, otsitavat nurka ei kujutatud üldse joonisel.

Kokkuvõttes oli ülesanne kitsa matemaatika eksami tegijatele jõukohane. Kõikide õppevormide eksaminandid said sellega rahuldavalt hakkama. Ülesanne eristas eksaminande ühtmoodi kõigi tulemusrühmade lõikes. Ka mõlema alaülesande eristusindeksi väärtus oli

suhteliselt kõrge (0,31 ja 0,53). Õpetamisel tuleks edaspidi suunata rohkem tähelepanu ruumikujundite joonestamisele.

5. Kokkuvõte ja järeldused

Eksamivalikust

- 2015. aastal eelistati laia matemaatika eksamit. Kitsa matemaatika eksami valis 3422 (42,0%) ja laia matemaatika eksami 4720 eksaminandi (58,0%). Eelmisel aastal oli kitsa ja laia matemaatika eksami valinuid enam-vähem võrdselt, vastavalt 49,4% ja 50,6%. Kitsa matemaatika eksami valinute osakaal vähenes kõigis maakondades v.a Järvamaa ja Põlvamaa. Ilmselt mõjutavadksamivalikut kõrgkoolide vastuvõtutingimused, mis nõuavad sagedamini laia matemaatika kursuse eksami sooritamist.
- Laia matemaatika eksami valinute osakaal on kasvanud nii meeste kui ka naiste puhul, samuti eesti ja vene soorituskeele rühmas. Suurim oli laia matemaatika eksami valinute osakaalu tõus vene soorituskeele eksaminandide rühmas (38,7%lt 47,9%le).
- Kitsa matemaatika eksamit eelistasid enim gümnaasiumi õhtuse või kaugõppe läbinud (valis 87,0%), eksternõppe (78,6%) ja kutseõppe läbinud eksaminandid (63,7%), kuid varem lõpetanutest valis selle vaid 29,9%. Lõpetatud koolitüübi järgi koostatudksamivaliku pingerida kattub suuresti eelmise aasta omaga. Suurim erinevus ilmneb gümnaasiumi päevase õppe lõpetanute puhul, kus kitsa eksami valijaid oli tänavu 36,2%, mis on 8,5 protsendipunkti võrra mullusest vähem. Muude õppevormide eksaminandid moodustasid kitsa eksami tegijatest 28,3% (mullu 23,6%).

Eksamitulemusest

- Eksamitöö keskmine tulemus oli 37,0 punkti 100st. See tulemus on 6,8 punkti võrra kõrgem kui 2014. aastal. Null punkti said töö eest 10 eksaminandi ehk 0,3% ja 0–10 punkti 307 eksaminandi (9,0%). Kuni 10-punktiste tööde osakaal oli kitsa matemaatika eksami tegijatel tänavu umbes kaks korda väiksem kui eelmisel aastal. Selline vähenemine on toimunud kõigis soo, soorituskeele ja õppevormi järgi moodustatud rühmades. Eriti suur on madala tulemusega eksaminandide arvu langus gümnaasiumi päevase õppe lõpetanute hulgas (tänavu 80 ehk 3,3% ja mullu 320 eksaminandi ehk 10,3%). Järelikult on eksaminandid eksamiks valmistumisse suhtunud tõsisemalt.
- Paremaksamitulemuse põhjuseks võib pidada veel asjaolu, et 742 kitsa matemaatika eksami tegijat (ca 22% kogu kitsa matemaatika eksami sooritajatest) olid koolis õppinud laia matemaatika kursust ja nende tulemus oli 11,4 punkti kõrgem ülejäänute tulemusest.
- Naiste keskmine tulemus oli ka tänavu oluliselt parem meeste omast, vastavad keskmised on 38,7 punkti ja 34,1 punkti. Vene soorituskeele eksaminandide tulemus oli oluliselt kõrgem eesti soorituskeele eksaminandide omast (keskmised 39,5 punkti ja 36,3 punkti). Aasta tagasi erineva soorituskeele eksaminandide tulemused teineteisest oluliselt ei erinenud. Kõrgeim tulemus oli gümnaasiumi päevase õppe

lõpetanutel – 41,9 punkti. Kõige madalam oli kutseõppe läbinute keskmine tulemus 18,5 punkti.

- Tänavu paranesid kõigi maakondade tulemused (v.a Hiiumaa, kus oli 7 eksaminandi). Kõige suurem tõus oli Pärnumaal (13,7 punkti), Valgamaal (12,2) ja Põlvamaal (10,5). Riigi keskmisest kõrgema tulemuse saavutasid Ida-Virumaa, Pärnumaa, Jõgevamaa, Saaremaa, Valgamaa, Läänemaa ja Viljandimaa. Nii tänavu kui ka mullu kuulusid tulemuste lõpuviisikusse Järvamaa, Lääne-Virumaa, Võrumaa ja Põlvamaa.
- Eksami I osa keskmine tulemus osutus tänavu oluliselt madalamaks II osa tulemusest (keskmised 17,9 punkti ja 19,1 punkti) nii kogu kontingendil kui ka soo, soorituskeele ja õppevormi järgi moodustatud rühmades. Tundus, et I ja II osa mitmed ülesanded ei erinenud palju oma keerukuselt, kuid aega I osa 7 ülesande lahendamiseks oli pool tundi vähem kui II osa 5 ülesande lahendamiseks. Kõige suurem erinevus I ja II osa tulemuse vahel oli kutseõppe, õhtuõppe ja eksternõppe lõpetanutel ning kõige väiksem gümnaasiumi päevase õppe läbinutel. Eelmisel aastal said muude õppevormide lõpetanud valdava osa oma punktidest I osast. Ilmselt olid ka muude õppevormide eksaminandid seekord paremini keskendunud just II osale.
- Kitsa ja laia matemaatika eksami ühisosa tulemus 14,9 punkti oli oluliselt madalam I ja II osa tulemusest nii kogu kitsa matemaatika eksami sooritanute kontingendil kui ka soo, keele ja õppevormi järgi moodustatud alarühmades. Tänavu saadi ühisosa ülesannete eest 40% ja ülejäänud ülesannete eest 60% kogutulemusest (vastavad keskmised 14,9 punkti ja 22,1 punkti). Järelikult kuulusid ühisossa kitsa matemaatika eksami mõlema osa keerukamad ülesanded. Selline valik oli igati põhjendatud. Sellest tuleneb aga suur erinevus kitsa ja laia matemaatika eksami tegijate tulemustes: laia matemaatika eksami tegijate ühisosa tulemus 30,5 punkti oli üle kahe korra kõrgem kitsa matemaatika eksami tegijate omast.

Eksami sisust

- Eksamitöö ülesanded hõlmasid kõiki kaheksat kitsa matemaatika kursust ja nende seas oli nii traditsioonilisi arvutus-teisendusülesandeid kui ka keerukamaid, mitmeetapilise mudeli koostamist nõudvaid ülesandeid. Kõigi ülesannete sisu vastas kitsa matemaatika ainekavale. Meeldis see, et peaaegu kõigi ülesannete korral leidis lahendamiseks erinevaid teid. Tänavune ülesannete komplekt oli hästi koostatud ja osutus tegijatele jõukohasemaks kui eelmisel aastal. Natuke rohkem võinuks selles olla rakendusliku sisuga ülesandeid, sest ainekava kohaselt on kitsa matemaatika kursuse üks oluline eesmärk *õppida kasutama matemaatikat igapäevaelus esinevates olukordades, tagades sellega sotsiaalse toimetuleku*.
- Paremini lahendati tuttavaid algoritmilisi ülesandeid, halvemini aga pikema lahenduskäiguga ja loovamat lähenemist nõudvaid ülesandeid. Hästi lahendati tõenäosuse, funktsiooni uurimise ja sirge võrranditega seotud ülesandeid. Raskusi valmistasid protsentarvutuse, jadade, logaritmide, kolmnurga lahendamise ja integraaliga seotud ülesanded. Mõlemal aastal osutus paljudele komistuskiviks põhikoolis õpitud algebraliste teisenduste mittevaldamine. Algebralise lihtsustamise ja

võrrandite-võrratuste lahendamise oskus oli kõige madalam eesti soorituskeelega meestel.

- Eesti soorituskeelega eksaminandide tulemused olid vene soorituskeelega eksaminandide omadest oluliselt kõrgemad tasandi- ja ruumigeomeetria ning integraali ülesannetes, vene soorituskeelega eksaminandidel aga kõigis algebraülesannetes.
- Eksamitöö kuue ülesande eristusindeksid olid suhteliselt madalad (vahemikus 0,12 – 0,22). Enamikul juhtudest oli siin põhjuseks asjaolu, et ülesanne eristas halvasti just madalamate tulemustega eksaminande, kuid paremaid tulemusi saanud eksaminande eristas hästi. Ühisosa ülesannete korral selgus, et sama ülesande eristusindeks oli laia matemaatika eksami rühmal oluliselt kõrgem kui kitsa matemaatika eksami tegijatel (nt kitsal 0,12 ja laial 0,63). Seega sai nende ülesannete alusel laia matemaatika eksami tegijaid järjestada palju paremini kui kitsa matemaatika eksami tegijaid. Kui valida ühisossa lihtsam ülesanne, ei eristaks see ilmselt laia matemaatika eksami tegijaid. Siit kerkib küsimus: kas saabki olla selliseid ülesandeid, mis samaaegselt oleksid head mõlemale (nii erineva tasemega) kontingendile. Võib-olla oleks mõistlikum mõlema eksami ülesanded koostada vaid ühele kindlale sihtrühmale.