

A l g e b r a.

Merekooli eelklassile.

Koostanud dr. E. Kägi.

I A l g e b r a ü l d m ö i s t e d.

1. Täht arvu tähisena.

Aritmeetikas tegelesime peamiselt numbriliste arvudega, ainult kolmiklauses kasutasime otsitava arvu asemel x -i ja protsentarvutuses kapitali sümboliks k , protsentmäära sümboliks p , aja sümboliks t ning intressi sümboliks i . Algebra kasutab arvude asemel peamiselt tähti $a, b, c, d, \dots, x, y, z$. Nõnda võime ütelda, et tähed on suuruste sümbolid.

Aritmeetikas peame iga ülesande omaette uuesti lahendama. Algebras lahendame ühe ülesande ja saame lõppresultaadina valemi, mida võime kasutada ka teiste samalaadiliste ülesannete lahendamiseks. Tähe kasutamine numbriliste arvude asemel lühendab ja kergendab arvutamist. Numbriline arv võib olla mitmekohane, sellepärast juba tema kirjutamine võtab rohkem ruumi ja aega, kui ühe tähe kirjutamine. Tähtedega võime teha samad põhitehted, milledega tegeleb aritmeetika, kuid lisaks sellele veel mitu uut arvutuse võimalust. Teisest küljest võtab tähtedega arvutamine hulk aega, et nendega harjuda, et algebrasse sisse elada, s.o. et tekiks kindel veendumus, et täht tõesti on samaväärne numbrilise arvuga. Näiteks, kui tööline teenib ühel päeval a kr ja teisel päeval b kr, siis kahel päeval kokku teenib ta

$$a + b$$

mis on kahel päeval teenitud raha summa.

On aga kogu nädalapäevade teenistus isesugune, näiteks esmaspäeval a kr, teisipäeval b kr, kesknädalal c kr jne. siis kuue päevaga teenib ta

$$a + b + c + d + e + f$$

2. Koefitsient ja astmenäitaja.

On aga tööliste päevapalk iga päev ühesugune, ütleme a kr, siis teenib ta nädalas kroone:

$$a + a + a + a + a + a$$

Kui liidetavad on võrdsed, siis ei ole vaja kirjutada niisugust rida, vaid meie loeme mitu liidetavat on, praegusel juhtumil on neid 6, ning kirjutame, et tööline saab nädalas $6a$ kr. Seda arvu tähe ees nimetame koefitsiendiks ehk kordajaks. Koefitsient näitab, mitu kord üks suurus on võetud liidetavana.

Kui tööline töötab a päeva ja saab päevas b krooni, siis teenib ta

$$a \cdot b$$

Juhtub nüüd, et tööpäevade arv ja päevapalk on võrdsed, ütleme a ; siis teenitud summa on

$$a \cdot a = a^2$$

Aritmeetika viimases vihus puudutasime numbrite astendamist, kuid seda võib teha ka tähtedega. Praegusel juhul ülal paremal kirjutatud arv 2 näitab, mitu korda a on võetud tegurina, see arv on astmenäitaja.

Astmenäitaja (eksponent, potents) on suurus, mis näitab, mitu korda üks suurus on võetud tegurina.

Kui tööline teenib ühel päeval a kr, teisel päeval b kr ja küsime, mille võrra on ühe päeva tasu suurem teise päeva tasust, siis lahutame ühe suuruse teisest. Ennem peame aga teadma, kumb nendest on suurem, ütleme a on suurem b -st, mida tähistame nõnda $a > b$. Päevapalkade vahe kroonides on siis

$$a - b$$

Edasi vaatame, kui suur on tööliste keskmine päevapalk, kui ta teenib a kr b päevaga. Selle küsimuse lahendamine viib meid jagamise tehte juurde, sest päevapalga leiame, kui kogu teenitud palga jagame päevade arvuga, saame

$$\frac{a}{b}$$

Nende lihtsate näidete varal püüdsin näidata, kuidas me tuleme algebraliste arvutuste juurde, s.o., kuidas me sooritame tähtedega liitmise, lahutamise, jagamise, korrutamise ja astendamise.

3. Tähteliste avaldiste numbriline väärtus.

Oleme ülesande lahendanud tähtede abil, s.o. algebraliselt, siis saame resultaadina tähtelise avaldise, mille võime muuta numbriliseks arvuks, kui üksikute tähtede väärtused on antud.

1. näide. Arvuta avaldise $a - b + c$ numbriline väärtus, kui $a = 12$, $b = 9$, $c = 3$! Asetades tähtede asemele nende väärtused, saame

$$a - b + c = 12 - 9 + 3 = 6$$

2. näide. Arvutada numbriline väärtus avaldisele $2.a.c + b$, kui tähed omavad eelmise näite väärtused.

$$2.a.c + b = 2.12.3 + 9 = 81$$

M ä r k u s: Tähtede vahele korrutise märki ei kirjutata. Nõnda siis, kui mingit märki pole, teame, et see on korrutamine.

3. näide. Leida numbriline väärtus avaldisele $(a + b)(3c - 2d)$, kui $a = 15$, $b = 5$, $c = 2$, $d = 3$!

$$(a + b)(3c - 2d) = (15 + 5)(3.2 - 2.3) = 20.0 = 0$$

Viimase näite puhul olgu meeldetuletatud, kui üks tegur on null, siis terve korrutis on null.

4. näide. Leida numbriline väärtus, kui $a = 10$, $b = 8$, $c = 2$, $d = 1$

$$\frac{3a}{b + 7c - 3d} = \frac{3.10}{8 + 7.2 - 3.1} = \frac{30}{19} = 1 \frac{11}{19}$$

5. näide. Arvutada avaldise $7yz - 4z - 2y$ numbriline väärtus, kui $y = 3$ ja $z = 2$!

$$7yz - 4z - 2y = 7.3.2 - 4.2.2 - 2.3 = 42 - 16 - 6 = 20$$

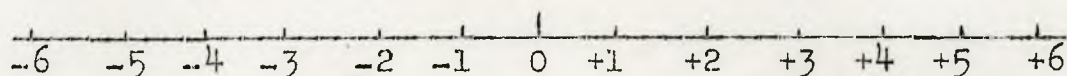
Lõpuks olgu veel nimetatud, et paarisarvu tähistatakse algebraliselt $2n$ ja paaritut arvu $2n + 1$ või $2n - 1$. Olgu n mis tahes arv, siis on $2n$ paaris arv, ja arv, mis on ühe võrra vähem või suurem sellest, paaritu arv.

4. Negatiivsed suurused.

Arvude liigituse juures (esimeses aritmeetika vihus) tähendasime juba, et suurused võivad olla positiivsed kui ka negatiivsed. Peatume veel kord negatiivsete suuruste juures, sest algebras omab iga suurus kas positiivse või negatiivse tähenduse.

Lahutamise tehte juures aritmeetikas me nõudsi, et vähendatav oleks suurem vähendajast, kuid algebras ei ole niisugust kitsendust. Näiteks, kui keegi, kellel on 240 kr, ostab endale 180 kroonise ülikonna, siis jääb temal veel $240 - 180 = 60$ kr üle, mida tähistame + 60. Ostab aga isik, kellel on ainult 120 kr, ka endale 180 kroonise ülikonna, siis jääb temal $120 - 180 = -60$ kr, s.o. 60 kr puudu, mida tähistame -60. Nõnda näeme, et ühel juhul 60 kr omab positiivse (+), teisel juhul (-) negatiivse tähenduse. Raha kassas omab + märgi, võlg aga - märgi; võit +, kaotus - jne. Arv ilma märgita omab n.n. numbrilise väärtuse või absoluutse väärtuse.

Väga sõlviv on positiivseid ja negatiivseid suurusi näidata n.n. arvsirge abil. Selleks joonistame ühe sirge, mille keskele võtame nulli ja nullist paremal positiivsed ning vasemal negatiivsed suurused.



Niisugust arvude kujutamist joonise abil nimetatakse arvude graafiliseks kujutiseks (graaf-~~o~~-kirjutama). Graafilist kujutusviisi kasutatakse õige sageli nii matemaatikas kui ka tehnilistes ainetes.

Näiteks, termomeetrit nullist ülespoole loeme + ja alla poole -kraadid kõrgust mere keskmisest nivoost ülespoole + alla - ühikud geograafilist laiust ekvaatorist N-di poole + S-di poole - geogr. pikkust Greenwichi meridiaanist E-ti poole + W-ti poole - jne.

Ülesandeid:

Nr. 1. Önnemängijal, kellel mängu algul oli a kr, kaotas esiteks neli korda, iga kord b kr; siis aga võitis kolm korda, iga kord b kr. Kirjutada tähtede abil avaldis, mis näitab tema rahaseisu pärast viimast võitu!

Nr. 2. Arvutada celmise ülesande numbriline resultaat, kui $a = 25$ ja $b = 3$!
(Vastus: 22 kr)

Nr. 3. Arvutada järgmiste avaldiste numbrilised väärtused, kui $a=12$; $b=9$; $c=3$; $d=4$!

1.) $a - (b + c)$? 2.) $a \cdot (2c + b)$? 3.) $(10a - b) \cdot 4c$?

4.) $\frac{2a}{b - c} - d$? (Vastused: 0; 188; 1332; 0)

Nr. 4. Arvutada järgmine avaldis, kui $x=2$ ja $y=1$!

$$\frac{(x + y)^3}{(x - y)^2} \quad (\text{Vastus: } 27)$$

Nr. 5. Arvutada järgmine avaldis, kui $k=5$; $l=4$; $m=3$ ja $n=2$!

$$k l^2 + m^2 n ? \quad (\text{Vastus: } 62)$$

II Kolm põhitehet algebras.

5. Liitmine. (Algebraalne summa).

Iga suurus, mis esineb liidetavana, vähendatavana või vähendajana, nimetatakse algebraalse avaldise liikmeks. Iga liige koosneb kas ühest, kahest või rohkem teguritest. Iga liikme ees on pluss või miinus märk, välja arvatud esimene liige, mille ees võib pluss märk jätta kirjutamata, kuid miinus märgi peame igal juhul kirjutama.

Avaldis, milles esineb ainult üks liige, nimetatakse üksikliikmeks ehk monomiks
 " " " " kaks liiget " kaksikliikmeks ehk binomiks
 " " " " kolm liiget " kolmikliikmeks ehk trinomiks
 " " " rohkem liikmeid " hulkliikmeks ehk polinoomiks.

Liikmeid nimetatakse sarnasteks, kui esinevad ühed ja samad sümboolid ning samas astmes, kuid võivad erineda koefitsiendi poolest.

Nõnda on sarnased liikmed $2a$ ja $5a$; $7ab$ ja $11ab$
 $3ab$ ja $4ab$; $10abc$ ja $12abc$
 $6abc$ ja $8abc$; $13xy$ ja $15xy$ jne.

Aritmeetikas liitmise puhul me tõesti liidame üksikud liidetavad ja saame aritmeetilise summa. Algebraalse liitmise puhul on tegemist algebraalse summaga. Algebraalse summa puhul me liidame või lahutame üksikud liidetavad, olenedes nende märgist.

Näiteks, $+5$ ja -3 liitmisel saame $+2$, sest positiivne suurus on 2-he võrra ülekaalus. $+3$ ja -7 liitmisel saame -4 , sest sel juhul on negatiivne arv ülekaalus 4-ja võrra. $+7$ ja -3 liitmisel on positiivne arv 4-ja võrra ülekaalus. Liites -5 ja -4 saame -9 , sel juhul liitsime nende numbrilised väärtused. Sedasama teeme ka $+5$ ja $+4$ liitmisel ning saame $+9$. Võtame kõik need juhtumid kokku, saame:

$$\begin{array}{r} +5 \\ -3 \\ \hline +2 \end{array} \quad \begin{array}{r} +3 \\ -7 \\ \hline -4 \end{array} \quad \begin{array}{r} +7 \\ -3 \\ \hline +4 \end{array} \quad \begin{array}{r} -5 \\ -4 \\ \hline -9 \end{array} \quad \begin{array}{r} +5 \\ +4 \\ \hline +9 \end{array}$$

Seda võime sõnastada järgmiselt: Algebraalne summa ühesuguste märkidega liikmete puhul on nende numbriliste väärtuste summa, mis omab nende ühise märgi, isesuguste märkide puhul nende numbriliste väärtuste vahe, omades suurema väärtuse märgi.

Märkus: Esialgsel algebra õppimisel võib positiivset liiget vaadata nagu võitu ja negatiivset nagu kaotust, siis on algebraalse summa leidmine arusaadavam.

Esineb ühes liitmisel hulk liikmeid, nii positiivseid kui negatiivseid, siis liidame positiivsed enda vahel, samuti ka negatiivsed enda vahel, ning lahutame suuremast väärtusest vähema ja resultaat omab suurema väärtuse märgi.

Nii nagu leidsime algebraalse summa numbriliste arvude puhul, võime seda ka leida tähtedega arvutades. Näiteks, kui me ütleme

$$5 \text{ kg} + 8 \text{ kg} + 12 \text{ kg} = 25 \text{ kg},$$

siis võime ka ütelda, et

$$5a + 8a + 12a = 25a$$

või $7xy + 11xy + 11xy + 15xy = 33xy$ jne.

Samuti kui võime arvutada

$$150 \text{ kr} - 70 \text{ kr} + 40 \text{ kr} - 50 \text{ kr} - 20 \text{ kr} = 50 \text{ kr}$$

võime seda teha ka

$$15abc - 7abc + 4abc - 5abc - 2abc = 5abc$$

- 5 -

või $-16 xy^3 + 3 xy^3 - 4 xy^3 - 7 xy^3 + 28 xy^3 = 4 xy^3$
Näiteks ütleme, et ühes talus on 4 hobust 10 lehma 18 lammast

teises "	3	"	8	"	12	"
kolmandas	2	"	6	"	10	"

kokku kolmes talus

On 9 hobust 24 lehma 40 lammast

Samuti toimime siis, kui on tarvis liita kolm hulkliiget

$$\begin{array}{r} 4 ab + 10 xy + 18 c^2 \\ 3 ab + 8 xy + 12 c^2 \\ \hline 2 ab + 6 xy + 10 c^2 \\ \hline 9 ab + 24 xy + 40 c^2 \end{array}$$

Hulkliikmete liitmine on sarnaste liikmete koondamine. Näiteks, kui liidame

$$a + 4 b - 6 c \text{ ja } -2 b + 5 c$$

saame, $a + 4 b - 6 c - 2 b + 5 c = a + 2 b - c$

Liites $-2x + 3 y - 4 z$ ja $x + y - z$, saame $-x + 4 y - 5 z$

Liites $2 x + 3 a + m$ ja $2 y - 3 a - m$, saame $2 x + 2 y$

M ä r k u s: Liikmete rühmitamisel on hea sarnaseid liikmeid eraldada sel teel, et tõmbame jooned alla, kas üks, kaks või kolm joontja kui sellest veel ei jätku, kasutame murdjoont.

Liites $70 a + 20 b - 33 x - 15 y$ ja $25 a - 28 b - 2 x + 18 y$,

saame $95 a - 8 b - 35 x + 3 y$

Liites $2 a^2 - 4 cd, -8 a^2 - 7 cd$ ja $-25 a^2 + 16 cd$, saame

s $2 a^2 - 4 cd - 8 a^2 - 7 cd - 25 a^2 + 16 cd = 31 a^2 + 5cd$

Hulkliikmete koondamist saame kontrollida sel teel, et asetame tähtede asemele vabalt võetud numbrid, sest numbrilised väärtused enne koondamist ja pärast seda peavad olema võrdsed.

Näiteks $-7 ab + 4 x^2 - 3 bx - 10 x^2 + 9 ab + 6 bx = 2 ab - 6 x^2 + 3 bx$

Asetades a asemel 1, b asemel 2 ja x asemel 3, saame

$$\begin{array}{r} -7.1.2 + 4.3.3 - 3.2.3 - 10.3.3 + 9.1.2 + 6.2.3 = 2.1.2 - 6.3.3 + 3.2.3 \\ -14 + 36 - 18 - 90 + 18 + 36 = 4 - 54 + 18 \\ -32 = -32 \end{array}$$

M ä r k u s: Proovimiseks võib kasutada ükskõik missuguseid arve; loomulikult võtame meie väiksemad arvud, et arvutamine oleks kergem.

Ulesandeid:

Nr. 6. Liita $14 x - 16 y + 3 z, 7 x + 2 y - 7 z$ ja $-16 x - 2 y + 4 z$ ning kontrollida resultaati, asetades $x = 1, y = 2, z = 3$!

Nr. 7. Liita $3 ab - 2 ac + 4 df, 7 ac - 6 df$ ja $4 ab + 9 ac - 3 df$!
(Vastus: $7 ab + 14 ac - 5 df$)

Nr. 8. Liita $11x^2y^3 - 16xy + 14ax^2 - 17x$, $16x^2y^3 + 14xy$ ja $17x^2y^3 - 43x + 27ax^2$! (Vastus: $44x^2y^3 - 2xy + 41ax^2 - 60x$)

Nr. 9. $34ax - 75by + 60cz$, $16ax + 25by - 10oz$ ja $41ax + 41by - 50oz$! (Vastus: $9ax - 9by$)

Nr. 10. $17x - 9y$, $3z + 14x$, $y - 3x$, $x - 17z$ ja $x - 3y + 4z$!
Kontrollida resultaat, asetades $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Nr. 11. $\frac{1}{2}ab^2 - \frac{2}{3}cd^3 + \frac{2}{3}x^3$, $\frac{2}{3}ab^2 - \frac{1}{4}cd^3 - \frac{1}{3}x^3$,

$\frac{1}{4}ab^2 + \frac{5}{12}cd^3 - \frac{3}{4}x^3$ ja $\frac{3}{4}ab^2 + \frac{2}{3}cd^3 + 2x^3$?

(Vastus: $2\frac{1}{6}ab^2 + \frac{1}{6}cd^3 + 1\frac{7}{12}x^3$)

6. Lahutamine. (Algebraalne vahe)

Algebraalse vahe puhul võib esineda kas lahutamise või liitmise tehe, olenedes vähendatava ja vähendaja märgist. Seletuseks võtame järgmised näited:

1. näide. Leida temperatuuride vahe ööpäeva jooksul, kui kõrgeim temperatuur päeval oli $+18^\circ$ ja madalaim öösel $+5^\circ$. Lahutades kõrgemast temperatuurist madalama, saame

$$18^\circ - 5^\circ = 13^\circ$$

b.) Kõrgeim temperatuur päeval oli $+7^\circ$ ja madalaim öösel -6° . Sel juhul temperatuuride vahe saamiseks peame samuti lahutama kõrgemast madalama

$$(+7^\circ) - (-6^\circ) = +7^\circ + 6^\circ = 13$$

Seda teeme sel viisil, et loome $+7^\circ$ -st nullini ja siis veel 6° alla poole, see annab 13° .

M ä r k u s: Et mitte kirjutada kaks miinusmärki üksteise järel, selleks asetame miinusarvu sulgudesse, seda võib teha ka plussarvuga.

c.) Olgu kõrgeim päevane temperatuur -5° ja madalaim öösel -18° . Siin on mõlemad temperatuurid alla nulli, kuid -5° on siiski kõrgem kui -18° , olgugi et 18 -ne numbriline väärtus on suurem 5 -st. Temperatuuride vahe saamiseks lahutame jälle kõrgemast temperatuurist madalama temperatuuri.

$$(-5^\circ) - (-18^\circ) = -5^\circ + 18^\circ = 13$$

Esimesel juhtumil meie lahutasime positiivsest positiivse, teisel juhtumil positiivsest negatiivse ja kolmandal juhtumil negatiivsest negatiivse suuruse. Esimesel ja kolmandal juhtumil oli lahutamise tehe, teisel juhtumil aga liitmise tehe. Kõigil juhtumil aga pidime muutma vähendaja märgi vastupidiseks. Nõnda saame algebra-
liseks lahutamiseks järgmise reegli: Muudame vähendaja märgid vastupidisteks ja toimime siis nagu algebraalse summa puhul.

Näiteks võtame kuus paari arvu, mida lahutame üksteisest. Kirjutame vähendatavad ühte ritta ja nende alla vähendajad:

+ 8	+ 4	- 7	- 5	- 9	+ 6;	+ 8	+ 4	- 7	- 5	- 9	+ 6
+ 5	+ 7	- 3	- 8	+ 4	- 2;	- 5	- 7	+ 3	+ 8	- 4	+ 2
						+ 3	- 3	- 4	+ 3	- 13	+ 8

Esiteks muutsime alumise rea märgid vastupidisteks ja siis lahutasime suuremast vähema numbrilise väärtuse ja asetasingime suurema väärtuse märgi.

Tähealiste suuruste puhul toimetame niisamuti, s.o. muudame vähendaja märgid ja siis koondame sarnased liikmed nagu algebralise summa puhul.

2. näide. Lahutada avaldisest $17ab - 2c$ avaldise $3ab - 4d$, saame $(17ab - 2c) - (3ab - 4d) = 17ab - 2c + 3ab - 4d = 14ab - 2c + 4d$

Märkus: Et äraldada vähendatav vähendajast, on parem asetada mõlemad sulgudesse.

3. näide. Lahutada avaldisest $m^2 - 2mn - n^2$ avaldis $m^2 + 2mn + n^2$, saame
 $(m^2 - 2mn - n^2) - (m^2 + 2mn + n^2) = \underline{m^2} - \underline{2mn} - \underline{n^2} - \underline{m^2} - \underline{2mn} - \underline{n^2} = -4mn$

Märkus: Võrdsed liikmed vastupidiste märkidega võib läbi tõmmata.

Eriainete õppimisel tuleb tihti kasutada väljendust, algebraline summa ja algebraline vahe, sellepärast olgu veel kord meelde tuletatud, et algebralise summa puhul tuleb toimida nii nagu märgid seda näitavad, ilma muutmata; algebralise vahe puhul tuleb aga enne muuta vähendaja märgid.

Nagu eelpool tähendasin, on hulkliikmete lahutamisel tarvilik asetada vähendaja sulgudesse ja sulgude avamisel muuta iga liikme märk vastupidiseks, nagu see peab vähendajaga sündima. Ka hulkliikmete liitmisel võib sulgusid kasutada, et eraldada üksikuid liidetavaid; sel juhul kirjutame sulgude ette plussmärgi ja sulgude avamisel jäävad märgid endisteks.

Sellest saamegi algebra sulgude kasutamise reegli:

Kui plussmärk on sulgude ees, siis sulgude avamisel üksikute liikmete märgid ei muutu. On aga miinusmärk sulgude ees, siis sulgude avamisel peab muutma kõikide liikmete märgid vastupidisteks. Seda viimast võib lühidalt öelda ka nõnda: Kui miinus on sulgude ees, siis märgid muutuvad sulgude sees.

Esinevad mitu liiki sulud, siis avame enne sisemised.

4. näide.
 $4x^2 - 5y^2 + x - [6x^2 - 3x - (y^2 - x)] =$
 $= 4x^2 - 5y^2 + x - [6x^2 - 3x - y^2 + x] =$
 $= \underline{4x^2} - \underline{5y^2} + \underline{x} - \underline{6x^2} + \underline{3x} + \underline{y^2} - \underline{x} =$
 $= -2x^2 - 4y^2 + 3x$

5. näide.
 $8 - \{7 - [4 + (2 - x)]\} =$
 $= 8 - \{7 - [4 + 2 - x]\} =$
 $= 8 - \{7 - 4 - 2 + x\} =$
 $= 8 - 7 + 4 + 2 - x =$
 $= 7 - x$

Ülesandeid:

Nr. 12 Lahutada avaldisest $-6xy + 5xz - 2y^2$ avaldis $3xy - 4xz - 3x^2$ ja kontrollida resultaati, asetades $x = 2$, $y = 1$ ja $z = 3$!

Nr. 13. Lahutada avaldisest $3xy - 18y^2$ avaldis $10x^2y - 4xy + 16y^2$!

(Vastus: $-10x^2y + 7xy - 3y^2$)

Nr. 14 Lahutada avaldisest $5abc + 3bcd + 7cde$ avaldis $4abc - 10bcd - 8cde$

(Vastus: $abc + 13bcd + 15cde$)

Nr. 15 Arvutada:

$(0,4x^2 - 7,5a + 5m^2) + (1 - 0,125a + 3m^3) - (1,5a - 7,2x^2 - 3,25m^3)$

(Vastus: $7,6x^2 - 9,125a + 5m^2 + 6,25m^3$)

Nr. 16 Leida kahe punkti geogr. laiuste vahe, kui ühe punkti geogr. laius on $37^\circ 45', 17''N$

teise punkti geogr. laius on $16^\circ 25', 53''S$

(Vastus: $54^\circ 11' 10''$)

Nr. 17. Leida kahe punkti geogr. pikkuste vahe, kui

ühe punkti geogr. pikkus on $108^\circ 45' E$

teise " " " " $38^\circ 13' W$

(Vastus: $163^\circ 2'$)

7. Korrutamine.

Korrutamisel aritmeetikas me korrutasime tegurite numbrilised väärtused ja korrutiste ette mingit märki ei kirjutatud. Algebraaliste suuruste korrutamisel korrutame ka tegurite väärtused, kuid korrutise ette kirjutame kas pluss- või miinusmärgi, olenedes tegurite märkidest. On loomulik, et positiivsete tegurite korrutamisel saame positiivse korrutise.

Küsimus on, missugune märk on korrutise ees, kui üks teguritest on negatiivne. Püüame seda selgitada näidete abil: Näiteks, kui õnnemängija kaotas kolm korda järgemööda, igakord 5 kr., siis selle kolme korra resultaat on ka kaotus ja nimelt 15 kr, mille võime kirjutada nõnda $3 \cdot (-5) = -15$

Siin esinevad korrutismärk ja miinusmärk korraga, sellepärast asetame miinusmärgi sulgudesse. Selles näites oli positiivne suurus korrutatud negatiivsega ja korrutis tuli negatiivne. Tuleb negatiivne suurus korrutada positiivsega, saame ka negatiivse korrutise, sest korrutis ei olene tegurite järjekorrast, s.o. tegureid võib ümber paigutada. $(-5) \cdot 3 = 3 \cdot (-5) = -15$

Seda võib ka nõnda seletada, et kui me korrutame üht negatiivset suurst, siis korrutame numbrilised väärtused ja asetame korrutise ette miinuse - märgi. Näiteks, kui vaja korrutada $7 \cdot (-5)$, siis korrutame nende numbrilised väärtused, s.o. $7 \cdot 5 = 35$, peale korrutamist asetame korrutise ette miinusmärgi, saame -35 . Seda viimast võib sulgude abil kirjutada nõnda:

$$7 \cdot (-5) = -(7 \cdot 5) = -35$$

$$(-7) \cdot 5 = -(7 \cdot 5) = -35$$

Viimast järeldust võime kasutada ka seletamiseks, kui negatiivse suuruse korrutame negatiivsega. Näiteks, kui on vaja korrutada $(-7) \cdot (-5)$. Seda teeme nõnda, et pöörame esiteks oma tähelepanu esimesele tegurile ja jätame teise muutmata ning ütleme, et kui üht korrutatakse negatiivse suurusega (praegusel juhul -7), siis

Korrutame nende väärtused ja asetame korrutise ette miinusmärgi

$$(-7) \cdot (-5) = -[7 \cdot (-5)]$$

Kandiliste sulgude sees on positiivse suuruse korrutamine negatiivse suurusega, mis annab

$$- [7 \cdot (-5)] = -[-35] = +35$$

Sulgude ees on miinusmärk, nõnda saame avamisel +35.

Kokkuvõttes saame algebralise korrutamise jaoks järgmise reegli:

- 1.) Tegurite numbriliste väärtuste korrutamine annab korrutise numbrilise väärtuso.
- 2.) Korrutise märk on pluss, kui tegurid omavad ühesugused märgid.
" " " miinus " " " isesugused "

Antud märkide seadus on kehtiv kahe teguri puhul. On aga enam tegureid kui kaks, siis korrutisemärk oleneb negatiivsete tegurite arvust, sest iga paar negatiivset tegurit annab plussi.

Kui negatiivseid tegureid on paarisarv, on korrutise märk pluss,
" " " " paaritu arv " " " miinus.

Märkide seadust algebralise korrutamise jaoks võime väljendada ka nõnda:

Pluss korda pluss on pluss
Pluss korda miinus on miinus
Miinus korda pluss on miinus
Miinus korda miinus on pluss.

Märkide seaduse rakendamiseks olgu järgmine näide:

Tehases töötasid õppinud töölised, kes said palka 100 kr nädalas ja õpilased, kes ei saanud palka, vaid maksid õppimise eest 10 kr nädalas. Kui tähistame inimeste arvu suurenemise märgiga + ja vähenemise märgiga -, samuti tehase sissetuleku suurenemise + ja vähenemise - märgiga. Õppinud tööliste palgad on aga tehase kassale miinuseks ja õpilaste juurdemaks plussiks.

Vaatame nüüd, kuidas muutub tehase sissetulek inimeste arvu muutudes:

1.) Kui õpilaste arv suureneb 5-e võrra, suureneb tehase sissetulek 50 kr võrra, sest

$$(+5) \cdot (+10) = +50$$

2.) Väheneb õpilaste arv 5-e võrra, kahaneb tehase sissetulek 50 kr võrra, sest

$$(-5) \cdot (+10) = -50$$

3.) Kui õppinud tööliste arv kasvab 5-e võrra, kasvab tehase väljaminek, mis on sama kui sissetuleku vähenemine 500 kr võrra.

$$(+5) \cdot (-100) = -500$$

4.) Kui õppinud tööliste arv väheneb 5-e võrra, väheneb väljaminek, mis on sama kui sissetuleku suurenemine 500 kr võrra.

$$(-5) \cdot (-100) = +500$$

Astendamine on ju ka korrutamine, sellepärast selgitame, kuidas toimida märkidega astendamisel:

a.) Positiivse aluse puhul on astendamise resultaat positiivne.

b.) Negatiivse aluse puhul on resultaat positiivne, kui astmenäitaja on paarisarv ja negatiivne, kui astmenäitaja on paaritu arv.

Näiteks, $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32 \text{ jne.}$$

Lõpuks vaatleme veel, kuidas toimida astmenäitajatega korrutamisel, kui astmealused on ühesugused.

Näiteks, $2^2 \cdot 2^3$, mis näitab, et 2 on võetud tegurina esiteks kaks korda ja siis veel kolm korda, mida võime kirjutada nõnda:

$$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{2+3} = 2^5$$

$$3^4 \cdot 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{4+5} = 3^9$$

$$5^3 \cdot 5^2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{3+2} = 5^5$$

Saame järgmise reegli: Ühesuguste astmealustega tegurite korrutamisel tuleb astmenäitajad liita.

Kõik eelpool tuletatud korrutamise reeglid on selgitatud numbriliste suurustega, kui need on kehtivad ka täheliste suuruste jaoks. Täheliste suuruste ees võivad esineda numbrilised suurused, mida me nimetame koefitsiendiks.

Nagu eelpool tähendatud, võivad algebralised avaldised olla ühekahe-, kolme- ja rohkem liikmelised. Korrutamisel me järgeme ainult üksikliikmetega ja hulikliikmetega, kusjuures kaksikliige ja kolmikliige kuuluvad ka hulikliikmete rühma.

1.) Üksikliikme korrutamine üksikliikmega.

Selleks olgu järgmised juhised:

- Määra korrutise märk.
- Määra korrutise koefitsient.
- Kirjuta tähed sobivas järjekorras (alfapeedi või astmenäitaja järjek.)
- Arvuta astmenäitajad.

1. näide. Korruta avaldis $+15a^2b^3$ avaldisega $-3a^3b^4$!

- Korrutise märk tuleb miinus, sest pluss kord miinus on miinus.
- Korrutise koefitsient on tegurite koefitsientide korrutis ja praeguse näite puhul on see $15 \cdot 3 = 45$.
- Korrutises esinevad tähed on a ja b.
- a esineb korrutises 5-das ja b 7-das astmes.

$$(15a^2b^3) \cdot (-3a^3b^4) = -45a^5b^7$$

2. näide. Korrutada avaldised: $-5m^3n^2a^2y^3$ ja $-2m^{10}n^6b^2y^2$!

$$(-5m^3n^2a^2y^3) \cdot (-2m^{10}n^6b^2y^2) = +10a^2b^2m^{13}n^8y^5$$

3. näide. Korrutada:

$$\left(-\frac{2}{3}ax^2\right) \cdot \left(\frac{3}{4}a^2x^3\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}ax\right) = +\frac{1}{6}a^4x^6$$

2.) Üksikliikme korrutamine hulikliikmega.

Siin selgitame seda ka esiteks numbriliste suurustega. Näiteks, olgu antud korrutada $3 \cdot 25$, mis võrdub 75, mida võime aga kirjutada ka nõnda $3 \cdot (20+5)$. Korrutades esimese teguri teise teguri esimese liikmega ja siis teise liikmega ning korrutised liites saame sama resultaadi $3 \cdot (20+5) = 60 + 15 = 75$

Võtame veel ühe näite, kus ühekohane arv on korrutatud kolmekohase arvuga.

$$7 \cdot 253 = 1771$$

Lahutame teise teguri kolmeks liikmeks ja korrutame iga liikme esimese teguriga, ning liites saame

$$7 \cdot (200+50+3) = 1400 + 350 + 21 = 1771$$

Sellest nähtub, et üksikliikme korrutamisel hulikliikmega korrutame üksikult kõik hulikliikme liikmed ja korrutised liidame.

Tähtedega avalduste puhul toimime just niisamuti

4. näide.

Korrutada üksikliige $2a^2b^3x^4$ hulikliikmega

$$7a^3x^3 - 21ab^4 - 3x^2$$

$$2 a^2 b^3 x^4 (7 a x^3 - 21 a b^4 - 3 x^2) = 14 a^3 b^3 x^7 - 42 a^3 b^7 x^4 - 6 a^2 b^3 x^6$$

5. näide. $\frac{1}{4} x^2 y^3 z \cdot (0,8 x^3 y^2 z - 5 x^2 y z^2 + 8 x z^3 - 12 y^2 z^2) =$
 $= 0,2 x^5 y^5 z^2 - 1,25 x^4 y^4 z^3 + 2 x^3 y^3 z^4 - 3 x^2 y^5 z^3$

Tihti esineb niisugune juhtum (isoäranis võrrandite juures), kus üksikliikmeks on ainult numbriline suurus.

6. näide.

$$5. (6 x - 2 y) = 30 x - 10 y$$

7. näide.

$$-12 (-2 a + 5 x - 3 + 4 y^2) = 24 a - 60 x + 36 - 48 y^2$$

3. Hulkliikme korrutamise hulkliikmega.

Hulkliikme korrutamist hulkliikmega näitame ositeks ka numbriliste suurustega. Näiteks, kui korrutame 43.65, saame 2795, mida võib kirjutada ka nõnda (40+3).(60+5). Seda viimast lahendame sel viisil, et võtame esimese teguri esimese liikme ja korrutame sellega kõik teise teguri liikmed, siis võtame esimese teguri teise liikme ning korrutame sellega kõik teise teguri liikmed; selle järgi liidame kõik saadud korrutised.

$$(40+3).(60+5) = 40.60 + 40.5 + 3.60 + 3.5 = 2400 + 200 + 180 + 15 = 2795$$

Võtame veel ühe korrutamise, näiteks 431.87 = 37497. Kirjutame mõlemad tegurid hulkliikmetena ja korrutame celpool antud juhiste järgi, saame:

$$(400+30+1).(80+7) = 32000 + 2400 + 80 + 2800 + 210 + 7 = 37497$$

Solles näites arvutasime nõnda, et võtsime teise teguri esimese liikme ja korrutasime sellega kõik esimese teguri liikmed, samuti ka teise teguri teise liikmega korrutasime kõik esimese teguri liikmed.

M ä r k u s! Missuguse teguri meie korrutamiseks valime, kas esimese või teise, ei ole tähtis, ainult liikmete järjekorrast peab kinni pidama. Aritmeetikas võtsime harilikult väiksema arvu, millega suuremat korrutasime, sellest põhinõttest võib ka algebras kinni pidada.

Hulkliikme korrutamisel hulkliikmega võime teha järgmise juhise järgi:

Võtame ühe teguri esimese liikme ja korrutame sellega kõik teise teguri liikmed

siis teise liikme	"	"	"	"	"	"
kolmanda liikme	"	"	"	"	"	jne.

Tähtedega avaldiste hulkliikmete korrutamisel talitame sama eeskirja järgi.

8. näide. Korrutada hulkliige $x^2 + 3 xy - 2 y^2$ hulkliikmega $2 xy - 2 y^2$!

$$(x^2 + 3 xy - 2 y^2) \cdot (2 xy - 2 y^2) = 2 x^3 y + 6 x^2 y^2 - 4 x y^3 - 2 x^2 y^2 - 6 xy^3 + 4 y^4 =$$

$$= 2 x^3 y + 4 x^2 y^2 - 10 x y^3 + 4 y^4$$

Tahame korrutamist kontrollida, siis asetame tähtede asemele numbrilised väärtused, nagu celpool (nr.5) oli seletatud. Näiteks võtame $x = 2$ ja $y = 1$

Asetades saame;

$$(2.2 + 3.2.1 - 2.1.1) \cdot (2.2.1 - 2.1.1) = 2.2.2.2.1 + 4.2.2.1.1 - 10.2.1.1 + 4.1.1$$

$$\begin{matrix} 8.2 & & 16+16 & & -20+4 \\ & 16 = 16 & & & \end{matrix}$$

9. näide. $(b^3 - 2 a^2 b + a b^2) \cdot (3 a^2 + 3 b^2 + a b) =$

$$= 3 a^2 b^3 + 3 b^5 + a b^4 - 6 a^4 b - 6 a^2 b^3 - 2 a^3 b^2 + 3 a^3 b^2 + 3 b^5 - 6 a^4 b$$

$$+ 3 a b^4 + a^2 b^3 = -2 a^2 b^3 + 4 a b^4 + a^3 b^2 + 3 b^5 - 6 a^4 b$$

Esineb kolm hulkiikmelist tegurit või veel rohkem, siis korrutamiseks kaks tegurit, selle korrutise koostada teguriga jne.

10. näide. Arvutada avaldis:

$$\begin{aligned} & 2(n+1) \cdot (n-1) \cdot (n+2) - 4n(1-n) \cdot (n+3) = \\ & = (2n+2) \cdot (n-1) \cdot (n+2) - (4n-4n^2) \cdot (n+3) = \\ & = (2n^2-2n+2n-2) \cdot (n+2) - (4n^2+12n-4n^3-12n^2) = \\ & = 2n^3-2n^2+2n^2-2n+4n^2-4n+4n-4-4n^2-12n+4n^3+12n^2 = \\ & = 6n^3-14n+12n^2-4 \end{aligned}$$

Ulesanded korrutamise harjutamiseks:

Nr. 18.	$x^4y^2z \cdot x^2y^4z^3 \cdot x^6y^7z$	Vastus: $x^{12}y^{13}z^5$
Nr. 19.	$(-6xyz) \cdot (-7axy^2) \cdot (-2a^3x^2y^6z^8)$	$(-84a^4x^4y^9z^3)$
Nr. 20.	$-7x^2y(-3x^2y^2+2xy)$	$(21x^4y^3-14x^3y^2)$
Nr. 21.	$-5x(-3a+2a^2+4)$	$(15ax-10a^2x-20x)$
Nr. 22.	$-3x^3y^5z^7(x^8y^6z^4-13x^4y^2)$	$(-3x^{11}y^{11}z^{11}+39x^7y^7z^7)$
Nr. 23.	$3c^2de(3cd^2e+6cde^2-5ode)$	$(9c^3d^3e^2+18c^3d^2e^3-15c^3d^2e^2)$
Nr. 24.	$(a-b) \cdot (a^2+ab+b^2)$	(a^3-b^3)
Nr. 25.	$(a+b) \cdot (a^2-ab+b^2)$	(a^3+b^3)
Nr. 26.	$(x^2-2xy+y^2) \cdot (x^2+2xy+y^2)$	$(x^4-2x^2y^2+y^4)$
Nr. 27.	$(c^2+3cd+4d^2) \cdot (c^2-3cd-4d^2)$	$(c^4-9c^2d^2-24cd^3-16d^4)$
Nr. 28.	$(n+2) \cdot (n^2-50n-100)$	$(n^3-48n^2-200n-200)$
Nr. 29.	$(a+b) \cdot (a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$	(a^5+b^5)
Nr. 30.	$(5x+6y) \cdot (4x^3-3x^2y+5xy^2-6y^3)$	$(20x^4+9x^3y+7x^2y^2-36y^4)$
Nr. 31.	$-3ab(ab-a^2)+2ab(a^2-b^2)$	$(-3a^2b^2+5a^3b-2ab^3)$
Nr. 32.	$2(x^2-3x+1) \cdot (x+4) \cdot (x-1)$	(x^2-9x+6)

Kontrolltöö nr. 1

Korrutada ja lihtsustada avaldised:

- 1.) $2a \cdot 3a^2b + 6ab \cdot 2a^2 - 4b \cdot 4a^3$!
 $(-80) \cdot (5x-3y)$!
 $3x^3(4x^2-5) - 6x^5 + 4x(x^2-1)$!
- 2.) $(a^2+2ab+b^2) - (a+b) \cdot (a-b)$!
- 3.) $(16-8y+4y^2-2y^3+y^4) \cdot (2+y)$!
- 4.) $(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+3) \cdot (x-3) \cdot (y+4)$!
- 5.) $(3a^3-2a^2+3a-5) \cdot (3a^3+2a^2-3a-5)$!
- 6.) $(a+3b-1) \cdot (a^2-5b) - (a-2b+2) \cdot (a^2-b)$!
- 7.) $(5x+7) \cdot (x-3) + (3x+5) \cdot (x+2) - (4x+5) \cdot (2x-2)$!
- 8.) $(x^3-7x-6) \cdot (x^3-3x^2+4) - (x^3-4x^2+x+6) \cdot (x^3+x^2-4x-4)$!
- 9.) $2x^2[x^2-3x(x-4)] + (x^2+xy-y^2) \cdot (x^2-y^2+xy^2)$!
- 10.) $(x+y+z) \cdot (x+y-z) \cdot (x-y+z) \cdot (y-x+z)$!