

A l g e b r a.

Merikooli eelklassile.

Koostanud dr. E. Kägi.

III. V ö r r a n d i õ p e t u s.

8. Võrrandi definitsioon.

Esimeses õppokirjas tutvusime algebraliste sümboolitoga ja mõningate algebraliste tohetega, et omada hädavajalikke teadmisi võrrandi käsitlemiseks. Võrrand on algebra tuum ja võimsus. Kes võrrandit mõistab koostada ja lahendada, see tunneb algebrat, see valitseb algebra üle. Iga probleemi järgi võib võrrandit koostada. Võrrand on ülesande matemaatiline väljendus, s.o. ülesanne on kirjutatud matemaatika keeles.

Seltskonnas võib tihti kuulda mõistatusi, mis põhjenevad võrrandil. Näiteks, "Mõttele üks arv, korruta see arv kahega, liida sellega nüüd 10 ja üttele minule resultaat, siis mina ütlen selle arvu, mida mõtlesid." Asetame selle lihtsa probleemi matemaatika keelde nõnda: mõeldava arvu tähistame tähoga x , korrutades seda 2-ga, saame $2x$; liidame nüüd sellega 10, saame $2x+10$. Ütleme, et resultaat on 34, siis võrrand on järgmine:

$$2x + 10 = 34$$

See võrrand on antud probleemi järgi koostatud, millest püüame arvutada otsitava arvu, s.o. lahendada selle võrrandi. Võrrandit lahendada tähendab leida arvu, mis seda võrrandit rahuldab.

Esiteks võime proovimise teel seda arvu otsida, asetades x -i asemele numbrilised väärtused niikaua, kuni meie leiame arvu, mis asetades muudab võrrandi mõlemad pooled võrdseks.

Asetades x -i asemele 1, saame vasemal pool võrdusmärki $2 \cdot 1 + 10$,
s.o. 12, mitte 34
" " " 5 " " " " $2 \cdot 5 + 10 = 20$ mitte 34
" " " 10 " " " " $2 \cdot 10 + 10 = 30$ " "
" " " 12 " " " " $2 \cdot 12 + 10 = 34$, nagu
peab olema.

Nõnda oli mõeldud arv 12 ja ülesanne on sellega lahendatud.

Võtame veel ühe sarnase probleemi. Näiteks ütleme: "Mõttele üks arv, liida sellele 5, korruta see summa 3-ga, lahuta sellest korrutisest 3."

Ütleme, et resultaat on 24.

Olgu mõeldud arv x , liites sellega 5, saame $x+5$. Korrutades 3-ga, saame $3(x+5)$, lahutades sellest 3, muutub avaldis vasemal pool võrdusmärki $3(x+5)-3$. Paremalpool võrdusmärki peab olema 24.

Nõnda on koostatud võrrand järgmine:

$$3(x+5)-3 = 24$$

Lahendame selle ülesande ka proovimise teel, asetades x -i asemele arvud 1, 2, 3 jne., seni kui leiame arvu, mis muudab võrrandi vasaku poole ka 24-ks.

Asetades 1, saame $3(1+5) - 3 = 15$
" 2 " $3(2+5) - 3 = 18$
" 3 " $3(3+5) - 3 = 21$
" 4 " $3(4+5) - 3 = 24$

Nõnda on otsitav arv 4, sest see arv muudab võrrandi mõlemad pooled võrdseks, s.o. see arv rahuldab võrrandit.

Seda arvu, mis võrrandit rahuldab, nimetatakse võrrandi lahenduseks või võrrandi juureks.

Võrrandi lahendamine proovimise teel on kõige kindlam lahendusviis, aga võtab palju aega, isäranis kui võrrand on küllalt kompli-

tseeritud. Sellepärast on koostatud võrrandi lahendamise jaoks kindlad reeglid, millede õppimisele meie nüüd asume. Kõige pealt püüame defineerida (kindlaks määrata), mis on võrrand.

Võrrandiks nimetame kahte algebralist avaldist, mis ühendatud võrdusmärgiga ja milles esineb vähemalt üks tundmatu ning seda tundmatut rahuldab üksainus väärtus. Liitmise ja ka teiste tehete puhul meie kasutame võrdusmärki, näiteks $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

Need ei ole algebralised avaldised ja ei esine ka tundmata suurus.

$$3x + 2x = 5x$$

Selles on küll kaks algebralist avaldust ja x võib ka tundmatu olla, kuid seda tundmatut ei rahulda üksainus arv, vaid kõik arvud.

Asetades x -i asemel 1, saame $3 + 2 = 5$

" " " 2 " $6 + 4 = 10$

" " " 3 " $9 + 6 = 15$ jne

See pidigi nõnda tulema, sest see oli harilik liitmise tehe, kuid mitte probleemi järgi koostatud võrrand.

Nagu võrrandi definitsioonist selgub, peab võrrand olema kahe poolega, vasak pool ja parem pool. Liikmete arv ühel ja teisel võrrandi poolel võib olla mitmesugune, näiteks

$$10x - 5 - 9x + 15 = 20x - 104$$

Kuid vähemalt üks liige peab kummalgi võrrandi poolel olema, näiteks

$$4x = 20$$

Vahest esineb võrrand, kus ühel võrrandi poolel on ainult null, näit.

$$4x - 8 = 0$$

Liikmed, milles esineb tundmatu, nimetatakse tundmatu liikmeks, teised aga tuntud liikmeks.

9. Võrrandi põhiomadused. Võrrandi lahendamine.

Aritmeetikas nägime, et murru lugejat ja nimetajat võib korrutada või jagada mingi arvuga, selle juures murru väline kuju muutub, kuid murru väärtus jääb muutmatuks. Ka võrrandi välist kuju võib mitmeti muuta, kuid tundmata arvu väärtus, s.o. võrrandi juur peab jääma muutmatuks.

Esialgsest käsitleme võrrandi nelja põhiomadust.

- 1.) Võrrandi mõlemale poole võime liita võrdsed suurused, juur jääb muutmatuks.
- 2.) Võrrandi mõlemalt poolelt võime lahutada " " " "
- 3.) Võrrandi mõlemaid pooli võib korrutada võrdse suuruseda " "
- 4.) Võrrandi mõlemaid pooli võib jagada võrdse suurusega " "

Kõigist neist põhiomadustest võib kergesti aru saada, kui tuleb meelde, et võrrandi mõlemad pooled on ju võrdsed; kui nüüd võrdsetele liita võrdsed suurused, siis on summad ka võrdsed. Sedasama võime ütelda ka lahutamise, korrutamise ja jagamise puhul. Lihtsamalt võime käsitada ka nõnda, kui ütleme, et võrrandi kaks poolt on nagu kaks kuu tasku, milles leiduvad võrdsed rahasummad. Kui nüüd ühte tasku panna veel üks rahasumma ja teise tasku sama suur summa, siis on raha hulgad mõlemas taskus jälle võrdsed. Kui ühest taskust ära võtta üks summa ja teisest taskust sama suur summa, siis jäägid on ka võrdsed. Sedasama võime ka korrutamise ja jagamise puhul öelda.

Võtame ühe võrrandi ja rakendame kõik need eelpooltoodud võrrandi põhiomadused.

$$14x + 16 = 10 + 17x$$

Proovinise teel leiame, et seda võrrandit rahuldab $x=2$, s.o. võrrandi juur on 2, saame

$$14 \cdot 2 + 16 = 10 + 17 \cdot 2$$

$$28 + 16 = 10 + 34$$

$$44 = 44$$

Liites mõlema võrrandi poolele võrdse arvu, ütleme näiteks 5, saame

$$14x + 16 + 5 = 10 + 17x + 5$$

Seda võrrandit rahuldab sama juur $x=2$

Lahutades mõlemast poolest ühe arvu, ütleme 8, saame

$$14x + 16 - 8 = 10 + 17x - 8$$

Ka seda võrrandit rahuldab võrrandi juur $x=2$

Korrutades võrrandi mõlemad pooled ühe ja sama arvuga, näiteks 3-ga, saame

$$3 \cdot (14x + 16) = 3 \cdot (10 + 17x)$$

Selle võrrandi juur on ka $x=2$

Lõpuks jagades mõlemad pooled mingi arvuga, näiteks 4-ga, saame

$$\frac{14x + 16}{4} = \frac{10 + 17x}{4}$$

Asetades siin x -i asemel 2, muutuvad ka mõlemad pooled võrdsaks.

Asudes nüüd võrrandi lahendamise juurde, võime selleks anda järgmised juhised:

1.) Eralda tuntud liikmed tundmatuist, seda teeme nõnda, et viime kõik tundmatud liikmed ühele ja tuntud liikmed teisele võrrandi poolele.

2.) Koonda (numbrite puhul liida) liikmed mõlemal poolel.

3.) Jaga mõlemad võrrandi pooled tundmatu koefitsiendiga.

Seda teeme selleks, et x -i koefitsiendist vabastada ja tema väärtust leida.

Näitame nüüd, kuidas on võimalik üht liiget ühelt võrrandi poolelt üle viia teisele poolele. Olgu antud võrrand:

$$3x + 7 = 9$$

Vasakul võrrandi poolel on üks tundmatu liige $3x$ ja tuntud liige 7, paremal pool üks tuntud liige 9. Tahame nüüd tundmatu liikme eraldada tuntuist, siis peame vasakul võrrandi poolel vabanema 7-st. Seda teeme nõnda, et lahutame mõlemalt võrrandi poolelt 7, saame

$$3x + 7 = 9$$

$$\underline{-7 \quad -7}$$

$$3x = 9 - 7$$

Näeme, et kadus küll võrrandi vasakult poolelt, kuid tuli üle paremale poole vastas märgiga. Võtame veel võrrandi

$$8x - 25 = 39$$

Tahame nüüd võrrandi vasakul poolel vabaneda 25-est, siis liidame mõlemale poole 25, saame

$$8x - 25 = 39$$

$$\underline{+25 \quad +25}$$

$$8x = 39 + 25$$

Ka siin näeme, et -25 läks teisele poolele plussmärgiga. Sellest nähtub, et iga võrrandi liiget võib ühelt võrrandi poolelt üle viia teisele poolele vastas märgiga. See on üks vanim võrrandi omadus, et liiget võib üle kanda. Sellest omadusest arvatakse tulevat isegi algebra nimi.

Nõnda siis liikmete eraldamiseks kanname tuntud liikmed ühele ja tundmatu liikmed teisele poolele, iga liige muudab ülekandmisel oma märgi.

1. näide. Lahendada võrrand ja kontrollida resultaat.

$$3x - 25 + 2x = 39 - 3x$$

Eraldame tuntud liikmed tundmatuist, saame

$$3x + 2x + 3x = 39 + 25$$

Koondame liikmed mõlemal võrrandi poolel, saame

$$8x = 64$$

Jagame mõlemad võrrandi pooled 8-ga, leiame x

$$x = 8$$

Kontrollimiseks asetame leitud juure väärtuse algvõrrandisse.

$$3 \cdot 8 - 25 + 2 \cdot 8 = 39 - 3 \cdot 8$$

$$24 - 25 + 16 = 39 - 24$$

$$15 = 15$$

Näeme, et leitud arv 8 rahuldab võrrandit, s.o. mõlemad võrrandi pooled muutuvad selle väärtuse puhul võrdseks.

2. näide. Lahendada võrrand:

$$\begin{aligned} 5x + 7 &= 2x + 9 \\ 5x - 2x &= 9 - 7 \\ 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Kontroll: $5 \cdot \frac{2}{3} + 7 = 2 \cdot \frac{2}{3} + 9$

$$\frac{10}{3} + 7 = \frac{4}{3} + 9$$

$$10\frac{1}{3} = 10\frac{1}{3}$$

3. näide. Lahendada võrrand:

$$\begin{aligned} 6x + 8 - 23x &= 16x - 3 \\ 6x - 23x - 16x &= -3 - 8 \\ -33x &= -11 \end{aligned}$$

Näeme, et mõlemad võrrandi pooled on miinusmärgiga, kuid me võime nad plussiks muuta, korrutades mõlemad pooled -1 -ga

$$(-1) \cdot (-33x) = (-1) \cdot (-11)$$

$$33x = 11$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Kontroll: $6 \cdot \frac{1}{3} + 8 - 23 \cdot \frac{1}{3} = 16 \cdot \frac{1}{3} - 3$

$$2 + 8 - 7\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3} - 3$$

$$2\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$$

Vajaduse korral võib alati võrrandi liikmete märgid muuta vastupidiseks, neid korrutades teguriga -1 , nagu viimasel näites tegime.

4. näide. Lahenda võrrand:

$$\begin{aligned} 3x - 14 + 2x &= x - 26 \\ 3x + 2x - x &= -26 + 14 \\ 4x &= -12 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Kontroll: $3 \cdot (-3) - 14 + 2 \cdot (-3) = -3 - 26$
 $-9 - 14 - 6 = -3 - 26$
 $-29 = -29$

Sellest nähtub, et võrrandi juur võib olla täisarv ja murd, nii positiivne kui ka negatiivne.

5. näide. Lahendada võrrand:

$5(2x - 1) - 3(3x - 5) = 4(5x - 26)$
Esitaks avame sulud, korrutades sulgude sees oleva avaldise koefitsientidega sulgude ees; siis toimetame nii nagu eelpool.

$$\begin{aligned} 10x - 5 - 9x + 15 &= 20x - 104 \\ 10x - 9x - 20x &= -104 + 5 - 15 \\ -19x &= -114 \\ 19x &= 114 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Kontroll: $5(2 \cdot 6 - 1) - 3(3 \cdot 6 - 5) = 4(5 \cdot 6 - 26)$

$$2.11 - 3.13 = 4.4$$

$$16 = 16$$

6. näide. Lahendada võrrand:

$12y - (2y + 1) = 38 + 7y$
Selles näites on tundmatu suurus tähistatud y -ga

$$12y - 2y - 1 = 38 + 7y$$

$$12y - 2y - 7y = 38 + 1$$

$$3y = 39$$

$$y = 13$$

Kontroll:

$$12.13 - (2.13 + 1) = 38 + 7.13$$

$$156 - 27 = 38 + 91$$

$$129 = 129$$

7. näide. Lahendada võrrand:

$$35a - 64 + (13 - a) = 16a - (47 - 14a)$$

Siin on tundmatu suurusks a , mis tuleb leida. Harilikult tähistatakse tundmatuid esimeses järjekorras x, y, z -ga, kuid tegelikult võib neid tähistada ükskõik missuguse tähega, kas $a, b, \dots, k, l, m, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ jne.

$$35a - 64 + 13 - a = 16a - 47 + 14a$$

$$35a - a - 16a - 14a = -47 + 64 - 13$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

Kontroll:

$$35.1 - 64 + (13 - 1) = 16.1 - (47 - 14.1)$$

$$35 - 64 + 12 = 16 - 33$$

$$-17 = -17$$

Ülesanded võrrandi lahendamiseks.

Lahendada võrrandid ja kontrollida resultaadid, asetades leitud juur algvõrrandisse.

Nr. 33. $5(5x + 4) - 6(6x + 5) - 7(7x - 6) + 88 = 0$

Nr. 34. $107 + 7(5x - 1) - 6(6x + 2) - 5(7x - 4) = 0$

Nr. 35. $4(3x - 2) - 3(2x - 1) - 2(x - 1) - 2,2 = 0$

Nr. 36. $3,1(1 - 3x) - 1,3(2 - 4x) - (3 - 7x) + 1,63 = 0 ? (x = 0,3)$

Nr. 37. $35 - [12 + (8x - 13)] = 32,5 + [9x - (6 - 3x)] ? (x = 1,7)$

Nr. 38. $17x = 117 - [3x - (17 - 2x)] - [11 - (15 - x)] ? (x = 6)$

Nr. 39. $4x + 3[2x - 4(x - 2)] = 72 - 6x ? (x = 12)$

Nr. 40. $2x - 5[3x - 7(4x - 9)] = 66 ? (x = 3)$

Nr. 41. $3(5 - 6x) - 5[x - 5(1 - 3x + 15)] = 23 ? (x = 4)$

Nr. 42. $4,2(11 - 3y) - 0,1(4y - 9) = 3,2(y - 3) ? (y = 3,5)$

Nr. 43. $1,5(13 - 7) - 0,25(3z - 13) - (14 - z) = 0 ? (z = 7)$

Nr. 44. $3 - 2a = a - 0,5 + 2(5 - 4a) - (1,1 + a) ? (a = 0,9)$

Nr. 45. $0,45(2 - m) + 0,64(7 - 4m) - 0,16m - 0,003 = 0 ? (m = 1,7)$

Esineb võrrandis mõni liige või kõik liikmed hariliku murruna, siis loiane nende ühise nimetaja ja liidame või lahutame samuti nagu aritmeetikas.

Näiteks olgu antud võrrand:

$$\frac{7}{12} x + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - 4x + 7$$

$$\frac{7}{12} x + 4x = \frac{5}{6} + 7 - \frac{1}{2}$$

$$4\frac{7}{12} x = 7\frac{2}{6}$$

$$x = \frac{7\frac{1}{3}}{4\frac{7}{12}} = 1\frac{3}{5} = 1,6$$

Viimase ülesande võime ka nõnda lahendada, et teeme võrrandi kõik murrulised liikmed korraga ühenimelisteks. Selle näite puhul on ühishinetaja 12.

$$\frac{7}{12} x + \frac{6}{12} = \frac{10}{12} - 4x + 7$$

Nüüd korrutame võrrandi kõik liikmed selle ühise hinetajaga, nõnda kaotame ära murrulised liikmed, saame

$$12 \cdot \frac{7}{12} x + 12 \cdot \frac{6}{12} = 12 \cdot \frac{10}{12} - 12 \cdot 4x + 12 \cdot 7$$

$$7x + 6 = 10 - 48x + 84$$

$$7x + 48x = 10 + 84 - 6$$

$$55x = 88$$

$$x = \frac{88}{55} = 1,6$$

Seega viimast lahendusviisi eelistatakse võrrandi lahendamise juures. Sellepärast kui võrrandis esinevad murrulised liikmed, siis esiteks teeme nad korraga ühenimelisteks ja korrutades selle ühishinetajaga, saame lahti murdudest.

Kokkuvõttes võime öelda, kui võrrandis esinevad sulud või murrud, või mõlemad koos, siis esiteks avame sulud ja vabastame murdudest ning siis asume võrrandi lahendamisele, nagu eelpool oli käsitletud.

$$2\frac{1}{6} - 2x = 1\frac{17}{18} - 1\frac{5}{27}x$$

Teeme liigimurdudeks ja leiame ühishinetaja, mis on ühine kõigi murruliste liikmete jaoks, praegusel juhul on see 54

$$\frac{13}{6} - 2x = \frac{35}{18} - \frac{32}{27}x$$

$$54 \cdot \frac{13}{6} - 54 \cdot 2x = 54 \cdot \frac{35}{18} - 54 \cdot \frac{32}{27}x$$

$$117 - 108x = 105 - 64x$$

$$-108x + 64x = 105 - 117$$

$$-44x = -12$$

$$x = \frac{3}{11}$$

9. näide. Lahendada võrrand:

$$\frac{x-1}{6} - \frac{x-2}{7} - \frac{3x-4}{42} = 0$$

Ühisnimetaja on 42, millega korrutame kõik liikmed.

$$\frac{42}{6} \cdot (x-1) - \frac{42}{7} \cdot (x-2) - \frac{42}{42} \cdot (3x-4) = 42 \cdot 0$$

$$7(x-1) - 6(x-2) - (3x-4) = 0$$

Paromal poolal jääb ikka null, sest nulli korrutis mingi arvuga on null.

$$\begin{aligned} 7x - 7 - 6x + 12 - 3x + 4 &= 0 \\ 7x - 6x - 3x &= 7 - 12 - 4 \\ -2x &= -9 \\ x &= 4,5 \end{aligned}$$

10. näide. Lahendada võrrand:

$$3\frac{1}{8} \cdot (10-x) - 2\frac{1}{5} \cdot (11-x) = 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{25}{8}(10-x) - \frac{11}{5}(11-x) = \frac{3}{2}$$

Ei ole vajadust korrutada kogu ühisnimetajaga, vaid ainult n.n. täiendusteguriga, s.o. tegur, millega korrutada nimetajat, et see muutuks ühisnimetajaks. Ühisnimetaja on praegusel juhtumil 40; esimese liikme täiendusteguriks on 5, teise liikme jaoks 8 ja kolmanda liikme jaoks 20, saame

$$\begin{aligned} 5 \cdot 25(10-x) - 8 \cdot 11(11-x) &= 20 \cdot 3 \\ 125(10-x) - 88(11-x) &= 60 \\ 1250 - 125x - 968 + 88x &= 60 \\ -125x + 88x &= 60 - 1250 + 968 \\ -37x &= -222 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Ülesanded:

Lahendada võrrandid:

Nr. 46. $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 2x - 2,8$? (Vastus: $x = 1,5$)

Nr. 47. $\frac{2x+1}{2} = \frac{7x+5}{8}$? ($x = 1$)

Nr. 48. $\frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x - 14$? ($x = 7$)

Nr. 49. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 5,5$? ($x = 2,64$)

Nr. 50. $\frac{3x}{8} = \frac{5x}{12} - \frac{x}{20} + 1$? ($x = 120$)

10. Võrrandi koostamine.

Olles nüüd tutvunud lihtsamate võrrandite lahendamisega, asume mõne kergema probleemi järgi võrrandi koostama. Võrrandi lahendamiseks on teatud juhised olemas, aga võrrandi koostamiseks ei ole neid.

Meie võime siiski üles seada võrrandi koostamiseks teatud kindlad põhinõtted ja kindla järjekorra, mis on järgmine:

1.) Lugeeda ülesanne läbi pilkanööda ja mitu korda, et iga sõna ja mõiste täiesti selgeks saaks.

- 2.) Määrata otsitav suurus.
3.) Ulesande sisu järgi koosta kaks võrdset avaldist, mis võib ühendada võrdlusnärgiga.

Aritmeetika vihus protsentsarvutuse jaoks meile võtsime valeni

$$i = \frac{k.p.t}{100}$$

See on koostatud protsentsarvutuse jaoks; see on võrrand, milles esi-
neb neli sümbolit; kui kolm on antud, saame neljanda arvutada.

1. näide. Mingi kapital laenati välja 25. veebruarist kuni
5. augustini samal aastal, kandis intressi selle aja eest 1281 kr.
Leida kapitali suurus, kui protsendimäär oli 3,5 !

Asetades antud suurused võrrandisse, saame:

$$1281 = \frac{k.3.5.160}{100.360}$$

Prægusel juhtumil on "k" otsitavaks suuruseks, mille suhtes me võr-
randi lahendame. Kaotades murru nimetaja, leiame "k"

$$1281.100.360 = k.3.5.160$$

$$k = \frac{1281.360.100}{3.5.160}$$

$$k = 82350 \text{ kr}$$

2. näide. 7. juulil asetati panka 1240 kr, mis võeti välja
19. novembril samal aastal. Leida protsendi määr, kui intressi saadi
selle aja eest 20,46 kr!

Asetame jälle antud suurused algvalenisse, saame

$$20,46 = \frac{1240.p.132}{100.360}$$

$$20,46 . 100.360 = 1240.p.132$$

$$p = \frac{2046.360}{1240.132}$$

$$p = 4,5$$

3. näide. Kui kauaks oli 584 kr välja laenatud, kui selle eest
saadi 8,03 kr protsendimääraga 5,5 ?

Asetame need väärtused samuti algvalenisse, saame

$$8,03 = \frac{584.5.5t}{100.360}$$

$$8,03.100.360 = 584.5.5t$$

$$t = \frac{803.360}{584.5.5}$$

$$t = 90 \text{ päeva}$$

Nägime, et üht ja sama võrrandit võime kasutada nelja ori juhtumil
jaoks, see ongi algebralise võrrandi tähtsus.

4. näide. Kui üht arvu korrutada 5-ga, sellest korrutisest
lahutada 17,5 ja saadud jääki korrutada 6-ga, siis saame arvu, mis
on 11-ne võrra suurem alguses mõeldud arvust. Leida see arv !

Tähistame selle mõeldava arvu x-ga, korrutades seda 5-ga,
saame 5 x, lahutades sellest korrutisest 17,5, saame 5 x - 17,5
selle vahe korrutame 6-ga " 6(5x - 17,5)

Sellega on võrrandi vasak pool valmis. Võrrandi parema poole saame ka hõlpsasti, sest ülesandes on öeldud, et see praegu koostatud vasak pool on 11-ne võrra suurem mõeldavast arvust x , seega on siis võrrandi parem pool $x + 11$ ja võrrand on järgmine:

$$6(5x - 17,5) = x + 11$$

Sellega olene ülesande kirjutanud matemaatika keelde, s.o. ülesanne on kirjutatud numbrite, sümbolite ja märkide abil. Matemaatika keel on palju lühem harilikust kirjakeelest. Lahendades selle võrrandi, leiame, et mõeldav arv oli 4.

5. näide. Arv 99 jagada kaheks nonda, et korrutades väiksema osa 5-ga ja suurema osa 2-ga, nende korrutiste summa on 306. Leida need osad!

Siin võime otsitavaks arvuks võtta kas suurema või väiksema osa. Kui olene selle määratud, siis teine osa on $99 - x$. Olgu suurem osa x . Ülesandes on öeldud, et suuremat osa tuleb korrutada 2-ga, mis annab $2x$ ja väiksemat osa 5-ga, mis annab $5(99-x)$. Nende korrutiste summa aga peab ülesande järgi olene 306, seega saame võrrandi:

$$2x + 5(99 - x) = 306$$

Lahendades selle võrrandi, saame suurema osa, mis võrdub 63; väiksem osa on siis $99-63 = 36$

6. näide. Kolm tanki mahutavad ühtekokku 24500 gallonit. Esimene tank mahutab 4500 gallonit rohkem teisest ja teine 2500 gallonit rohkem kolmandast tankist. Leida iga tanki mahutavus!

Kõige sobivam on tähistada kolmanda tanki mahutavus x -ga, siis

teise	"	"	on $x+2500$ ja
esimese	"	"	$x+2500+4500$

Ülesande järgi peab nende kolme tanki mahutavus kokku olene 24500 gallonit, saame võrrandi:

$$x + x + 2500 + x + 2500 + 4500 = 24500$$

Lahendades selle võrrandi leiame, et $x = 5000$, mis on kolmanda tanki mahutavus.

Teise tanki mahutavus on $5000 + 2500 = 7500$ ja

kolmanda " " " $5000 + 2500 + 4500 = 12000$ gallonit

7. näide. Keegi noormees astus laevale teenistusse noorena madrusena, palgaga 125 kr kuus. Reisi kestel sai tema madruseks, palgaga 142 kr kuus. Kui kaua teenis tema noorena madrusena ja kui kaua madrusena, kui reisi kestvus oli kaks aastat, ning tema teenis selle aja jooksul 3170 kr?

Siin võime tundmatuks võtta kas noorena madruse teenistusaaja või madruse teenistusaaja. Kui olene selle valinud siis teine nendest võrdub $24 - x$; ütleme, et teenistusaeg noorena madrusena on x , siis teenistusaeg madrusena on $24 - x$. Ta teenis noorena madrusena125. x kr ja madrusena 142.($24 - x$) kr

Nende summa annab kogu teenistuse, mis peab ülesande järgi võrduma 3170 kr, saame võrrandi:

$$125x + 142(24-x) = 3170$$

Lahendades selle võrrandi leiame $x = 14$, mis on noorena madruse teenistusaajaks; teenistusaeg madrusena on $24-14 = 10$ kuud.

8. näide. Talus oli kanu ja kodujäneseid. Ühtekokku oli 26 pead ja 70 jalga. Palju oli kanu ja palju kodujäneseid?

Peade arv annab üldarvu, mis on 26. Kui tähistada kanade arvu x -ga, siis kodujäneste arv on $26-x$. Igal kanal on kaks jalga ja jänesel neli jalga, nonda kirjutame võrrandi:

$$2.x + 4.(26-x) = 70$$

Võrrandi lahendamisel saame $x=17$, mis on kanade arv ja kodujäneste arv on $26 - 17 = 9$.

9. näide. Kaks isikut mängisid raha peale kaarte. Mängu alguses oli esimesel mängijal raha 4 krooni võrra rohkem teisest mängijast. Kui esimene oli kaotanud 15 kr, siis teise mängija rahasumma oli kaks korda suurem esimesest. Kui palju raha oli kummalgi mängu alguses?

Kui esimese mängija raha võtame x , siis teise oma on $x-4$. Võtame aga teise mängija raha x -na, siis esimese oma on $x+4$. Kasutame seda viinast. Peale 15 kroonist kaotust oli mängijate rahaseis järgmine:

$$\begin{array}{lcl} \text{Esimesel mängijal} & \dots\dots\dots & x + 4 = 15 \\ \text{teisel} & \text{"} & x + 15 \end{array}$$

Ülesande järgi on aga nüüd teise mängija raha kaks korda suurem, või mis on sama, kui esimesel mängijal on kaks korda vähem. Et nende kahe rahasumma vahel asetada võrdlusmärki, peame esimese mängija raha korrutama 2-ga, saame võrrandi:

$$2(x+4-15) = x + 15$$

Lahendades selle, saame $x = 37$, mis oli teise mängija raha mängu alguses, esimesel oli 4 kr võrra rohkem, s.o. 41 kr.

10. näide. Kaupmees tahab teha mahlasogu kahest mahlasordist. Üht sorti mahla oli temal 30 liitrit hinnaga 1,2 kr liiter ja teist sorti 40 liitrit hinnaga 1,5 kr liiter. Palju peab tema vett juurde lisama, et müüa seda segu 1,2 kr liiter?

Otsitavaks arvuks on siin vee liitrite arv, mida tähistame x -ga. Kogu segu hulk oli $30 + 40 + x$ liitrit ja selle eest pidi kaupmees saama $\dots\dots\dots 1,2.(30 + 40 + x)$ kr, mahl maksis temal endal $1,2.30 + 1,5.40$ kr

Need kaks avaldist ühendame võrdlusmärgiga, saame võrrandi:

$$1,2.(30 + 40 + x) = 1,2.30 + 1,5.40$$

Lahendades selle võrrandi leiame $x = 10$, mis on vajalik vee liitrite arv, et seda mahlasogu müüa 1,2 kr liiter.

11. näide. Põranda linoleumi õlitamiseks kulus 5,40 krponi eest õli. Leida õlikihi paksus, kui põranda pikkus oli 5,1 m ja laius 4,2 m ning õli liitri hind oli 4 kr!

Selle ülesande lahendamisel peame kasutama risttahuka ruumala arvutamist, mis meil on teada juba algkooli kursusest. Risttahuka ruumala saame, kui põhipinna korrutame kõrgusega. Praeguse ülesande puhul on risttahuka põhipinnaks põranda pind ja kõrguseks õlikihi paksus. Ruumala saame õlihulgast, mida kulus (5,4: 4) liitrit või sama palju dm³. Enne võrrandi kirjutamist peame tegema nõõtühikud kõigi võrrandi liikmete jaoks ühesugusteks.

Ülesandes esinevad meetrid ja dm-id, toome kõik dm-teks ning kirjutame võrrand:

$$51.42.x = \frac{5,4}{4}$$

$$x = \frac{5,4}{4.51.42}$$

$$x \approx 0,00063 \text{ dm} = 0,063 \text{ mm}$$

Ülesanded võrrandite koostamiseks.

Nr. 51. Arv 62 jagada kaheks osaks nõnda, et 0,3 suuremast osast ja 0,7 väiksemast osast annaksid kokku 27. Leida need osad!
(Vastus: 41 ja 21)

Nr. 52. Kahe arvu vahe on 2,3. Kui suuremat arvu korrutada 10-ga ja väiksemat 4-ga, siis on nende korrutiste vahe 72,2. Leida need arvud!

(Vastus: 10,5 ja 8,2)

Nr. 53. Jagada 130 kr kolme isiku vahel nõnda, et esimene saab 8 kr vähem kui teine ja kolmas 12 kr rohkem kui teine. Palju sai igaüks?

(Vastus: 34, 42 ja 54)

Nr. 54. 20 töölisi said päevase töö eest 167,5 kr. Osa töölisi sai päevas 8 kr, ülejäänud 9,5 kr. Palju oli odavana-palgalisi töölisi?

(Vastus: 15)

Nr. 55. 2 kg tee ja 6 kg kohvi eest maksti 60 kr. 1 kg tee hind on 10 krooni võrra kallim 1 kg kohvi hinnast. Mis maksab kohvi kg?

(Vastus: 5 kr)

Nr. 56. Kinos müüdi 512 piletit kokku 302 krooni eest. Esimene plats maksis 75 senti ja teine plats 50 senti. Kui palju oli kumbagi liiki pileteid müüdud?

(Vastus: 184 ja 328)

Nr. 57. Pudel korgiga maksab 2,6 kr. Pudel ilma korgita on 1,9 kr kallim korgist. Mis maksab pudel ja mis maksab kork üksi-kult?

(Vastus: 2,25 ja 0,35)

Nr. 58. Kolm vaati sisaldas ühepalju õli. Kui esimesest vaadist oli välja lastud 60 liitrit ja teisest 45 liitrit, siis oli kolmandas vaadis kaks korda rohkem õli kui kahes esimeses kokku. Kui palju õli oli iga vaadis alguses?

(Vastus 70)

Nr. 59. Kaup müüdi 1064 krooni eest ja saadi sealjuures 12% kasu. Palju maksis kaup sisseostes?

(Vastus: 950 kr)

Nr. 60. Kaup müüdi 4 % -se kahjuga 357,6 krooni eest. Leida sisseostu hind!

(Vastus: 372,5 kr)

Nr. 61. Kui suur oli kapital, mis andis 25.aprillist 10.septembrini aastas 4,5 % -ga 114,21 krooni intressi?

(Vastus: 6768 kr)

Nr. 62. Linn elanike arv aasta lõpul oli 18128. Kui suur oli see aasta algul, kui aastane kasv oli 3 %?

Kontrolltöö nr 2.

1.) Kahe arvu vahe on 4. Kui suuremat arvu korrutada 2-ga ja väiksemat 5-ga, siis on nende korrutiste summa 26-e võrra suurem väiksemast arvust. Leida need arvud!

2.) Arv 90 jagada kaheks nõnda, et 0,9 väiksemast osast ja 0,4 suuremast annavad kokku 55. Leida need osad!

3.) Kolm isikut jagavad 75 kr endi vahel nõnda, et esimene saab kaks korda niipalju kui teine ja kolmas 15 krooni vähem kui esimene. Palju saab igaüks?

4.) Üks kassa oli alguses neli korda suurem teisest kassast. Kui esimene kassa andis välja 50 kr ja teine kassa võttis sisse 37 kr, siis muutus teine kassa kolm kord suuremaks esimesest kassast. Kui suur oli kunagi kassa alguses?

5.) 32 töolist said päevapalgana kokku 576 krooni. Osa töölisi sai 15,5 kr ja ülejäänud 18,7 kr päevas. Palju oli kõrgema-palgalisi töölisi?

6.) Raudteekassast müüdi 23 piletit kokku 79,5 kr eest; osa neist oli esimese ja ülejäänud teise klassi piletid. Esimese klassi pilet maksis 4,5 kr ja teise klassi pilet 3 kr. Palju oli müüdud esimese klassi pileteid?

7.) Pilt ühes raamiga maksab 530 kr. Pilt ilma raamita on 440 kr kallim raamist. Mis maksab pilt?

8.) Ühes anumast on kaks korda rohkem vett teisest anumast. Kui esimesest ära valada 70 liitrit ja teise juurde valada 50 liitrit, siis on teises anumast 68 liitrit rohkem esimesest anumast. Kui palju oli vett alguses ühes ja teises anumast?

9.) Segati 7,5 kg tubakat, mille kg hind oli 24 kr, parema tubaka sordiga, mille kg hind oli 46 kr. Palju peab paremat sorti tubakat võtna, et segu hind maksaks 31 kr kg?

10.) Isa on praegu 31 aastat vana ja poeg 3 aastat. Mitme aasta pärast on isa pojast kolm korda vanem?