

Saime x null astmes ja y teises astmes.

Kui me sama näite kirjutame murru kujul ja taandame, saame

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}}{\cancel{5} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}} = 4 y^2$$

Näeme, et x null astmel pole vaja kirjutada

Kui meil teisi tegureid peale x^0 ei esine, näiteks

$$x : x = x^{1-1} = x^0 \text{ või murru joone abil } \frac{x}{x} = 1$$

siis peame x^0 asemel kirjutama 1

$$\text{Samuti } \frac{a^2}{a^2} = a^0 = 1; \quad \frac{b^3}{b^3} = b^0 = 1 \text{ jne.}$$

Sellest nähtub, et iga suurus null astmes on 1

$$3. \text{ näide: } (-42 a^3 m^2 y^3) : (7 a^2 m^2) ?$$

Selles näites esinevad jagatavas a, m , ja y , jagajas ainult a ja m , kuid meie võime selle puuduva y all mõelda y^0 ($y^0 = 1$), saame jagatise

$$-6 a^1 m^0 y^3 = -6 a y^3$$

Jagamisel esinevad samuti kolm juhtumit nagu korrutamiselgi, s.o.

1) Üksliikme jagamine üksliikmega.

2) Hulkliikme jagamine üksliikmega.

3) Hulkliikme jagamine hulkliikmega.

Kolm eelmist näidet käsitlesid esimest juhtumit, nüüd asume teise juhtumi selgitamisele.

Hulkliikme jagamisel üksliikmega jagame jagatava iga liikme jagatisega.

$$4. \text{ näide: } \text{Hulkliige } 24 a^5 x^3 - 96 a^5 x^6 + 16 a^7 x^4 \text{ jagada üksliikmega } 8 a^4 x^3$$

Jagatava esimese liikme jagamisel jagajaga saame	$3a$
" teise " " " " "	$-12 a x^3$
" kolmanda " " " " "	$2 a^3 x$

$$\text{Saame jagatise } 3a - 12 a x^3 + 2 a^3 x$$

$$5. \text{ näide: } \text{Jagada avaldis } 25 a x^2 y^3 - 10 x^3 y^4 - 5 x^2 y^3 \text{ avaldisega } 5 x^2 y^3$$

$$(25 a x^2 y^3 - 10 x^3 y^4 - 5 x^2 y^3) : (5 x^2 y^3) = 5a - 2xy - 1$$

$$6. \text{ näide: } (2 \cdot 3^2 \cdot 5 - 3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 5) : 3^2 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 10 - 315 = -305$$

$$7. \text{ näide: } (4x^4 y^6 + 8x^7 y^3 - 12x^6 y^4) : (2x^2 y^2) = 2x^2 y^4 + 4x^5 y - 6x^4 y^2$$

$$8. \text{ näide: } \left(\frac{1}{4} a^5 b^2 + 5 a^3 b^4 - 7 a^4 b^3 \right) : \left(-\frac{1}{2} a^2 b^2 \right) = -\frac{1}{6} a^3 - \frac{1}{3} a b^2 + \frac{2}{3} a^2 b$$

$$9. \text{ näide: } [a^2(a+b) + a^3(a+b)] : a^2 = (a+b) + a(a+b)$$

Hulkliikme jagamisel hulkliikmega asetame jagatava ja ka jagaja liikmed ühe tähe astmenäitaja kahanevas (või kasvavas) järjekorras, siis jagame jagatava esimese liikme jagaja esimese liikmega, saadud jagatise korrutame jagaja kõigi liikmetega ja lahutame selle jagatavast.

Selle järgi jagame jäägi (esimene jääk) esimese liikme jagaja esimese liikmega, saadud jagatise korrutame jälle jagaja kõigi liikmetega ja lahutame esimesest jäägist, saame teise jäägi. Siis jagame teise jäägi esimese liikme jagaja esimese liikmega, jagatise korrutame jagajaga, lahutame jne. Jagamine võib lõppeda jäägita või jäägiga, nagu aritmeetikaski.

10. näide: Jagada hulkliige $6 + x^2 - 5x$ hulkliikmega $x - 2$

Seame jagatava liikmed x -i kahanevas astmes järjekorras, jagajas on see järjekord juba olemas.

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \underline{+x^2 - 2x} & \\ -3x + 6 & \\ \underline{+3x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

Lahutamisel tuleb märgid muuta, muudetud märgid asuvad kõrgemal.

11. näide: $(4x - 5x^2 - 1 + 6x^3) : (3x - 1) ?$

Selles näites seame ka liikmed x -i kahanevate astmete järgi.

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 5x^2 + 4x - 1 & 3x - 1 \\ \underline{+6x^2 - 2x} & \\ -3x^2 + 4x - 1 & \\ \underline{+3x^2 - x} & \\ 3x - 1 & \\ \underline{3x - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

12. näide: $(64 + x^4) : (8 + x^2 - 4x) ?$

Ka siin asetame liikmed x -i astmete järgi kahanevas järjekorras.

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 64 & x^2 - 4x + 8 \\ \underline{+x^4 - 4x^3 + 8x^2} & \\ 4x^3 - 8x^2 + 64 & \\ \underline{+4x^3 - 16x^2 + 32x} & \\ 8x^2 - 32x + 64 & \\ \underline{8x^2 - 32x + 64} & \\ 0 & \end{array}$$

13. näide: $(18a^3 - 22a^4 - 7a^2 + 8a^5 + a) : (1 + 4a^2 - 3a) ?$

$$\begin{array}{r|l} 8a^5 - 22a^4 + 18a^3 - 7a^2 + a & 4a^2 - 3a + 1 \\ \underline{8a^5 + 6a^4 + 2a^3} & \\ -16a^4 + 16a^3 - 7a^2 + a & \\ \underline{+16a^4 + 12a^3 + 4a^2} & \\ 4a^3 - 3a^2 + a & \\ \underline{4a^3 - 3a^2 + a} & \\ 0 & \end{array}$$

14. näide: $(a^5 + b^5) : (a + b) ?$

$$\begin{array}{r|l} a^5 + b^5 & a + b \\ \underline{a^5 + a^4b} & \\ -a^4b + b^5 & \\ \underline{+a^4b + a^3b^2} & \\ +a^3b^2 + b^5 & \\ \underline{+a^3b^2 + a^2b^3} & \\ -a^2b^3 + b^5 & \\ \underline{+a^2b^3 + ab^4} & \\ +ab^4 + b^5 & \\ \underline{+ab^4 + b^5} & \\ 0 & \end{array}$$

Ulesandeid:

- nr. 63. $(8x^6 + 2x^2) : 2x^2$? (Vastus : $4x^4 + 1$)
- nr. 64. $(12x^2y^2 + 20xy^2 - 8x^2y) : 4xy$? (" $3xy + 5y - 2x$)
- nr. 65. $(9ax + 12x + 3) : 3$? ($3ax + 4x + 1$)
- nr. 66. $(2m^3p - m^2p - 0,5mp) : 0,1mp$? ($20m^2 - 10m - 5$)
- nr. 67. $(x^2 + 3y^2 + 4xy) : (x + y)$? ($x + 3y$)
- nr. 68. $(x + x^2 - 56) : (x - 7)$? ($x + 8$)
- nr. 69. $(2m^2 - m - 1) : (m - 1)$? ($2m + 1$)
- nr. 70. $(9ax^2 - 17a^2x + 6a^3 - 10x^3) : (2x^2 + 3a^2 - ax)$? ($2a - 5x$)
- nr. 71. $(13a^2 + 4a^4 - 6a - 12a^3 + 1) : (2a^2 - 3a + 1)$? ($2a^2 - 3a + 1$)
- nr. 72. $(24x^6 - 34x^3 - 21x + 5x^7 - 6x^5 - 4x^4 - 48x^2 - 28) : (4x^3 - 7 - 5x^2 + x^4)$?
($5x^3 + 4x^2 + 3x + 4$)
- nr. 73. $(1 - 3x^2 - x - x^5) : (1 + 2x + x^2)$? ($1 - 3x + 2x^2 - x^3$)
- nr. 74. $\frac{9m^2 - 12m + 4}{3m - 2} - \frac{6m^2 - 5m - 4}{2m + 1}$? (2)
- nr. 75. $(x^4 - 1) : (x + 1)$? ($x^3 - x^2 + x - 1$)
- nr. 76. $(t^4 - 3t^2 + 1) : (t^2 - t - 1)$? ($t^2 + t - 1$)
- nr. 77. $(a^3 + b^3) : (a + b)$? ($a^2 - ab + b^2$)

12. Korrutamine ja jagamine valemite abil.

Mõned lihtsamad korrutised ja jagatised, mis algebras sageli esinevad, võime ka pähe õppida. Esialgselt võtame viis niisugust avaldist.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

$$\text{I } \boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Sõnastada võime seda järgmiselt: Kahe suuruse summa korrutatud sama suuruse vahel võrdub nende suuruste ruutude vahel.

Lühidalt võib seda ka väljendada nõnda: Summa kord vahe on ruutude vahe.

Võrrandi pooli võib vahetada ja meie võime viimase valemi kirjutada ka nõnda:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Viimast väljendame sõnadega järgmiselt: Kahe suuruse ruutude vahe võrdub nende esimese astmete summa ja vahe korrutisega.

Järgmiseks käsitame kaksliikme (binomi) summa ja vahe ruutu ning kuupi.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

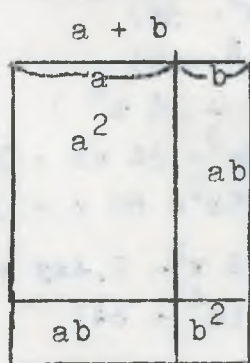
$$\text{II } \boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab}$$

$$\text{III } \boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab}$$

Kaht viimast valemit võime sõnastada järgmiselt: Kahe liikme summa ruut võrdub esimese liikme ruut pluss teise liikme ruut pluss nende liikmete kahekorone korrutis.

Kahe liikme vahe ruut võrdub esimese liikme ruut pluss teise liikme ruut miinus nende liikmete kahekordne korrutis.

Geomeetriliselt võime seda näidata järgmiselt: Võtame sirglõigu a ja sirglõigu b , nende summa on sirglõik $a + b$. Joonistame ruudu, mille küljeks on $a + b$. Selle ruudu pindala koosneb neljast ristküliku pindalast a^2 ja b^2 ning kaks $a \cdot b$ saame: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, nagu eelpool



tuletatud.

Joonise abil võime näidata ka vahe ruutu.

Samal viisil võime tuletada ka binoomi summa ja vahe kuüpide valemid

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a - b)^3 &= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

$$\text{IV. } \boxed{(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2}$$

$$\text{V. } \boxed{(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2}$$

Kahe liikme summa kuup võrdub mõlemate liikmete kuupide summaga pluss kolmekordne esimese liikme ruudu korrutis teise liikmega pluss kolmekordne teise liikme ruudu korrutis esimese liikmega.

Kahe liikme vahe kuup võrdub nende kuupide vahega miinus kolmekordne esimese liikme ruudu korrutis teise liikmega pluss kolmekordne teise liikme ruudu korrutis esimese liikmega.

Neid eelpool tuletatud valemuid (I, II ja III) võime kasutada ka jagamise puhul ja nimelt järgmiselt:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b \quad \text{või} \quad \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

$$\frac{(a + b)^2}{a + b} = a + b \quad \text{või} \quad \frac{(a - b)^2}{a - b} = a - b$$

Kahe liikme ruutude vahe jagub nende esimeste astmete summaga ja ka nende vahega. Kahe liikme ruutude summa ei jagu nende esimeste astmete summaga ega nende vahega.

Kahe liikme kuupide summa jagub nende esimeste astmete summaga, kuid mitte nende vahega. Kahe liikme kuupide vahe jagub nende esimeste astmete vahega, kuid mitte nende summaga.

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$$

Märkus: Avaldist $a^2 + ab + b^2$ nimetatakse puudulikuks ruuduks, sest täisruudus esineb $2ab$.

Kahte viimast valemit võime ka nõnda kirjutada:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Sel kujul võib neid valemeid kasutada teguriteks lahutamiseks, mille selgitamisele nüüd asume.

Ülesanded: Kasutades eelpool tuletatud valemeid (I - V), lahendada järgmised ülesanded:

Nr. 78. $(x + 6)(x - 6)$?

Vastused:
($x^2 - 36$)

" 79. $(a^2 - 1)(a^2 + 1)$?

($a^4 - 1$)

" 80. $(a^2 - 4b^3)(4b^3 + a^2)$?

($a^4 - 16b^6$)

" 81. $(3a + 4b)^2$?

($9a^2 + 24ab + 16b^2$)

" 82. $(5c - 6)^2$?

($25c^2 - 60c + 36$)

" 83. $(4x - 0,3y)^2$?

($16x^2 - 2,4xy + 0,09y^2$)

" 84. $(a^2 + 8 + 4a)(a^2 + 8 - 4a)$?

($a^4 + 64$)

" 85. $596 \cdot 604 = (600 + 4)(600 - 4)$?

" 86. $703 \cdot 697$?

" 87. $(\frac{1}{3}a^2x + \frac{3}{2}b^3y^2)$?

$\frac{a^4x^2}{9} + a^2b^3xy^2 + \frac{9}{4}b^6y^4$

" 88. $(2x + 3y)^3$?

$8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

" 89. $(4a - 5b)^3$?

$64a^3 - 125b^3 - 240a^2b + 300ab^2$

Teguriteks lahutamine.

Nagu aritmeetikas lahutasime kordarvu teguriteks, nõnda võime ka algebralise avalduse lahutada teguriteks, olgugi et lahutamise võtted on mitmeti erinevad arvu lahutamisest.

1) Ühise teguri võtmine sulgude ette.

Olgu antud kaksikliige $ab + ac$, milles esineb tegur a mõlemas liikmes; seda ühist tegurit võib võtta sulgude ette ja kirjutada nõnda:

$$ab + ac = a(b+c)$$

Saime kahest liikmest kahe teguri korrutise, millest üks tegur on a ja teine $a + b$

Märkus: Sulgude sees esineb küll kaksikliige $a + b$, kuid me loeme sulgude sees oleva avaldise alati üheks teguriks.

Kontrollimiseks võime sulud avada, korrutades sulgude ees oleva teguri sulgude sees oleva avaldisega.

Esinevad liikmetes ka koefitsiendid, võime ka nendest ühise teguri sulgude ette võtta, näiteks $54a^4 + 63a^7$

$$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \quad \text{ja} \quad 63 = 3 \cdot 3 \cdot 7, \text{ millest ühised tegurid on } 3 \cdot 3 = 9$$

Samuti esineb mõlemas liikmes tegur a , esimese liikmes 4-das ja teises 7-das astmes.

Nõnda saame: $54 a^4 + 63 a^7 = 9 a^4(6 + 7a^3)$

Esinevad kolm või rohkem liiget, toimetame samuti, näiteks

$$a^4b^2 - a^3b^4 - a^2b^6$$

Selles avaldises on igasliikmes ab , kuid isesugustes astmetes. Sulgude ette saame võtta koige madalamas astmes

$$a^4 b^2 - a^3 b^4 - a^2 b^6 = a^2 b^2 (a^2 - ab^2 - b^4)$$

Avaldises $16 + 32a - 24a^3$ on ühine tegur ainult koefitsiendis, saame

$$8(2 + 4a - 3a^3)$$

Avaldises $(a + b)x + (a + b)y$ on ühiseks teguriks $a + b$, mille võtame sulgude ette, saame

$$(a + b)(x + y)$$

Avaldises $xy + yz + zu + ux$ ei ole ühist tegurit kõigi nelja liikme jaoks, kuid me võime rühmitada esiteks paariviisi, sest esimeses kahes liikmes on ühine tegur y ja kahes viimases liikmes u , saame

$$xy + yz + zu + ux = y(x + z) + u(z + x)$$

Saime nelja liikme asemel kaks liiget, millel on ühiseks teguriks $(x + z)$. Teises liikmes on küll $z + x$, kuid me võime selle asemel kirjutada ka $x + z$, sest summa ei olene liidetavate järjekorrast.

$$y(x + z) + u(x + z) = (x + z)(y + u)$$

Nõnda saime ka selle neljaliikmelise avaldise muuta kahe teguri korrutiseks.

1. näide. Lahutada teguriteks avaldis $a^3 + a^2 - x - ax$?

Siin rühmitame esiteks ka paariviisi, nagu viimases näites

$$a^2(a + 1) - x(1 + a) = (a + 1)(a^2 - x)$$

Märkus: Kui kogu liige tuleb sulgude ette, siis kirjutame sulgude sisse selle liikme asemel 1, sest sulgude avamisel peame saama jälle endise kuju.

Märkus 2. a esineb sulgude sees pluss märgiga, sest me võtsime sulgude ette teguri $-x$.

2. näide. Lahutada teguriteks avaldis $ac + 2a - c - 2$?

Selles näites rühmitame esimese liikme kolmandaga ja teise neljandaga, saame

$$a(a - 1) + 2(a - 1) = (a - 1)(c + 2)$$

3. näide. Lahutada teguriteks kui võimalik $12c^9 - 3c^5 - 4c^4 + 1$

Siin on sobiv rühmitada esimene liige teisega ja kolmas neljandaga; esimesest paarist saame sulgude ette võtta $3c^5$, teises paaris ei ole ühist tegurit, saame

$$3c^5(4c^4 - 1) + (-4c^4 + 1)$$

Nüüd näeme, et esimeses paaris on tegur $4c^4 - 1$ ja teises $4c^4 + 1$, s.o. ühesugused sümboolid, kuid vastasmärkidega. Märgid võime teha ühesugusteks, kui asetame sulgude ette miinusmärgi ja sulgude sees muudame ka märgid, saame

$$3c^5(4c^4 - 1) - (4c^4 - 1) = (4c^4 - 1)(3c^5 - 1)$$

Kuidas igal juhtumil rühmitada, selle kohta ei saa mingit juhust anda, vaid seda peab proovima iga ülesande puhul eraldi, missugune rühmitus annab kõige parema resultaadi teguriteks lahutamisel.

Lõpuks olgu, öeldud, et sulgude ette võmine on jagamistehe ja sulgude avamine korrutamistehe.

Selle eeskirja järgi võime võtta sulgude ette niisuguse teguri, mis ei esine kõigis liikmesis, näiteks

$$a + b = a(1 + \frac{b}{a})$$

Et see tehe õige on võime kontrollida sulgude avamisega

$$a(1 + \frac{b}{a}) = a + \frac{a \cdot b}{a} = a + b$$

Võime võtta sulgude ette ka niisuguse teguri, mis ei esine üheski liikmes, näiteks olgu antud $a + b$, millest võtame sulgude ette c , saame

$$a + b = c(\frac{a}{c} + \frac{b}{c})$$

Avades sulud saame erise kuju $a + b$.

2) Teguriteks lahutamine valemite abil. kord

Nagu eelpool tuletasime, võrdub ruutude vahe summa vahega (valem I) Seda valemit võib kasutada teguriteks lahutamisel, näiteks

$$x^2 - 4y^2 = x^2 - (2y)^2 = (x + 2y)(x - 2y)$$

$$9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = (3a + 4b)(3a - 4b)$$

1. näide. Lahutada teguriteks $20x^5y - 45xy^3$?

Selles näites võtame esiteks sulgude ette ühisteguri ja siis kasutada valemit:

$$20x^5y - 45xy^3 = 5xy(4x^4 - 9y^2)$$

Teine tegur kujutab ruutude vahet

$$(2x^2)^2 - (3y)^2 = (2x^2 + 3y)(2x^2 - 3y)$$

Nõnda saame $20x^5y - 45xy^3 = 5xy(2x^2 + 3y)(2x^2 - 3y)$

2. näide. $a^2 - (b - c)^2 = [a + (b - c)][a - (b - c)] = (a + b - c)(a - b + c)$

3. näide. $(a + b - c)^2 - (a - b + c)^2 = [(a + b - c) + (a - b + c)][(a + b - c) - (a - b + c)] = (a + b - c + a - b + c)(a + b - c - a + b - c) = 2a(2b - 2c) = 4a(b - c)$

4. näide. $81x^8 - 1 = 3^4x^8 - 1 = (3^2x^4)^2 - 1^2 = (9x^4 + 1)(9x^4 - 1) = (9x^4 + 1)[(3x^2)^2 - 1] = (9x^4 + 1)(3x^2 + 1)(3x^2 - 1)$

5. näide. $254^2 - 253^2 = (254 + 253)(254 - 253) = 507$

6. näide. Lahutada teguriteks avaldis $4x^2 + 9 + 12x$?

Selle näite puhul kasutame II valemit, sest

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2 = (2x + 3)(2x + 3)$$

7. näide. Lahutada teguriteks $x^3 - 2x^2 + x$?

Võtame esiteks ühise teguri x sulgude ette, saame

$$x(x^2 - 2x + 1)$$

Sulgude sees olev avaldis on III-da valemi põhjal $(x - 1)^2 = (x - 1)(x - 1)$

8. näide. $0,16a + 0,09ac^2 - 0,24ac = a(0,16 + 0,09c^2 - 0,24c)$

Sulgude sees olev avaldis on $(0,3c - 0,4)^2$, saame

$$a(0,16 + 0,09c^2 - 0,24c) = a(0,3c - 0,4)(0,3c - 0,4)$$

9. näide. Lahutada teguriteks $(3a)^3 + (2b)^3$?

Nagu eelpool näidatud, võib kuupide summa lahutada teguriteks järgm.

$$(3a)^3 + (2b)^3 = (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$$

10. näide. $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

11. näide. $81u^3 + 24 = 3(27u^3 + 8) = 3[(3u)^3 + 2^3] = 3(3u + 2)(9u^2 - 6u + 4)$

12. näide. Lahutada teguriteks $27 - 125x^3$?

Seda avaldist võib teguriteks lahutada kuupide vahe abil, sest kuupide vahe jagub nende esimese astmete vahel, saame

$$27 - 125x^3 = 3^3 - (5x)^3 = (3 - 5x)(9 + 15x + 25x^2)$$

13. näide. Lahutada teguriteks $2a^2 + 7ab + 6b^2$?

Siin pole võimalik ühistegurit sulgude ette võtta ega rühmitada paari- viisi, kuid me lahutame teise liikme kaheks sobivaks liidetavaks ja siis võtame paaridena.

$$2a^2 + 3ab + 4ab + 6b^2 = a(2a + 3b) + 2b(2a + 3b) = (2a + 3b)(a + 2b)$$

Seda peab leidma proovimise teel, missugusteks liidetavateks on sobiv lahutada.

14. näide. Lahutada teguriteks $x^2 + x - 2$?

Siin ei saa teist liiget lahutada kaheks liidetavaks, vaid me asendame selle kahe uue liikmega, mis on sobivad teguriteks lahutamisel $x = 2x - x$

$$x^2 + x - 2 = x^2 + 2x - x - 2 = x(x - 1) + 2(x - 1) = (x - 1)(x + 2)$$

Ulesanded:

Vastused:

Nr. 90.	Lahutada teguriteks:	$18x^3y^2 + 42x^2y^3 - 30xy^4$?	$6xy^2(3x^2 + 7xy - 5y^2)$
nr. 91.	"	$15a^{10}x^4 + 45a^7x^3 - 35a^5x^2$?	$5a^5x^3(3a^5x + 9a^2 - 7x^2)$
" 92	"	$abx + cx + ab + c$?	$(ab + c)(x + 1)$
" 93	"	$a - 49$?	
" 94	"	$16a^{12} - 81b^{16}$?	$(4a^6 + 9b^8)(2a^3 + 3b^4)(2a^3 - 3b^4)$
" 95	"	$a^2 - (b + c)^2$?	$(a + b + c)(a - b - c)$
" 96	"	$(a + b)^2 - (a - b)^2$?	$4ab$
" 97	"	$4a^5 - 2a^4 + a^3$?	$a^3(4a^2 - 2a + 1)$
" 98	"	$98a^4c^2 + 72b^6 - 168a^2b^3c$?	$2(7a^2c - 6b^3)^2$
" 99	"	$1 + x^3$?	$(1 + x)(1 - x + x^2)$
" 100	"	$a^3 - b^3 - (a - b)^3$?	$3ab(a - b)$
" 101	"	$5y^2 + 13yz - 6z^2$?	$(y + 3z)(5y - 2z)$
" 102	"	$40z^2 + 37z - 9$?	$(8z + 9)(5z - 1)$
" 103	"	$36a^2b + 33a^3bc^5 - 15c^{10}$?	$3(4a^3b + 5c^5)(3a^3b - c^5)$

IV. Algebralised murrud.

14. Murdude taandamine ja laiendamine.

Nii nagu aritmeetikas, võime ka sama reeglite järgi algebralisi murde taandada või laiendada.

1. näide. Taandada murd: $\frac{72a^4b^5}{30a^2b^6}$?

Lahutades teguriteks, leiame ühisteguri lugeja ja nimetaja jaoks, millega mõlemad jagame (suurim ühisjagaja) mis selle näite puhul on $6a^2b^5$

$$\frac{72 a^4 b^5}{30 a^2 b^6} = \frac{12 a^2}{5 b}$$

2. näide.

$$\frac{4a + 4a^2}{6a^2 - 8a} = \frac{4a(1+a)}{2a(3a-4)} = \frac{2(1+a)}{3a-4}$$

3. näide.

$$\frac{4c^4 + 12c^2 m + 9m^2}{12c^3 m + 18cm^2} = \frac{(2c^2 + 3m)^2}{6cm(2c^2 + 3m)} = \frac{2c^2 + 3m}{6cm}$$

4. näide.

$$\begin{aligned} \frac{6a^5 b^4 - 12a^4 b^5 + 6a^3 b^6}{10a^7 b - 10a^5 b^3} &= \frac{6a^3 b^4 (a^2 - 2ab + b^2)}{10a^5 b (a^2 - b^2)} = \\ &= \frac{6a^3 b^4 (a-b)(a-b)}{10a^5 b (a+b)(a-b)} = \frac{3b^3 (a-b)}{5a^2 (a+b)} \end{aligned}$$

5. näide

$$\frac{a^2 b - b + 2a^2 - 2}{a+1} = \frac{b(a^2 - 1) + 2(a^2 - 1)}{(a+1)(a^2 - a + 1)} = \frac{(a^2 - 1)(b+2)}{(a+1)(a^2 - a + 1)} = \frac{(a-1)(b+2)}{a^2 - a + 1}$$

6. näide. Laiendada murd $\frac{a^2 - ab + b^2}{a-b}$ korrutades seda $(a+b)$ -ga

$$\frac{(a^2 - ab + b^2)(a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^3 + b^3}{(a-b)}$$

Ulesanded:

Vastused:

Nr. 104. Täienda murd: $\frac{ax+ay}{ab+ac}$; $\frac{4a+4a^2}{6a^2-8a}$; $\frac{12x^2-3}{12x^2+6x}$? $\frac{x+y}{b+c}$; $\frac{2(a+1)}{3a+4}$; $\frac{2x-1}{2x}$

" 105 " $\frac{4c^4 + 12c^2 m + 9m^2}{12c^3 m + 18cm^2}$? $\frac{2c^2 + 3m}{6cm}$

" 106 " $\frac{ax+bx+ay+by}{ay+by-ax-bx}$? $\frac{x+y}{y-x}$

" 107 " $\frac{a^2 b - b + 2a^2 - 2}{a^3 + 1}$? $\frac{(b+2)(a-1)}{a^2 - a + 1}$

15. Murdude liitmine ja lahutamine.

Algebraaliste murdude liitmisel ja lahutamisel on, nii nagu aritmeetiliste murdudegi juures, esimeseks küsimuseks ühine nimetaja. Kui ühine nimetaja on juba olemas, siis kirjutame kõikide murdude lugejad ühe joone peale vastavate märkidega ja liidame või lahutame, nagu see on antud juhtumil tarvilik.

1. näide. $\frac{19a^2}{x^3} - \frac{17a^2}{x^3} + \frac{8a^2}{x^3} = \frac{19a^2 - 17a^2 + 8a^2}{x^3} = \frac{10a^2}{x^3}$

2. näide $\frac{5a^2}{3c} + \frac{4a}{3c} - (\frac{2a^2}{3c} - \frac{5a}{3c}) = \frac{5a^2 + 4a - 2a^2 + 5a}{3c} = \frac{3a^2 + 9a}{3c} = \frac{a^2 + 3a}{c}$

$$3. \text{ näide. } \frac{xy+y^2}{2x-y} + \frac{6x^2-7xy}{2x-y} - \frac{2x^2-2xy}{2x-y} = \frac{xy+y^2+6x^2-7xy-2x^2+2xy}{2x-y} =$$

$$= \frac{-4xy+y^2+4x^2}{2x-y} = \frac{(2x-y)^2}{2x-y} = 2x-y$$

Märkus: Kui murrujoone ees on miinus märk, siis on sellel sama tähendus, nagu sulgude ees on miinus, s.o. kirjutades ühise joone peale tuleb märgid muuta.

$$4. \text{ näide. } \frac{a}{a^3-1} + \frac{1}{1-a^3} ?$$

Siin esinevad mõlema murru nimetajas samad sümboolid, kuid vastas-märki-dega. Tahame teha märgid ühesugusteks, peame ühe murru lugejat ja nime-tajat korrutama -1 -ga, siis murrujoone ees märk ei muutu. Võime aga teha ka nõnda, et muudame märgid nimetajas ja murru joone ees, siis lugeja mär-gid jäävad muutmata. Kui muudame märgid teise murru nimetajas, siis saa-me

$$\frac{a}{a^3-1} + \frac{-1}{a^3-1} \text{ või } \frac{a}{a^3-1} - \frac{1}{a^3-1}$$

$$\frac{a}{a^3-1} - \frac{1}{a^3-1} = \frac{a-1}{a^3-1} = \frac{a-1}{(a-1)(a^2+a+1)} = \frac{1}{a^2+a+1}$$

Esinevad murrud isesuguste nimetajatega, siis teeme nad esiteks ühe-nimelisteks. Ühisnimetaja leidmine toimub sama põhimõtte järgi nagu aritmeetikaski, s.o. lahutame kõik nimetajad teguriteks ja leiame vähima ühiskordse.

$$5. \text{ näide. } \frac{4x-5y+8}{18} - \frac{7x+3y-5}{30} + \frac{2x-5y-3}{45} ?$$

Selles näites on kõik numbrilised nimetajad.

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3; \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5; \quad 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5; \quad \text{v.ü.n.} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$$

$$\frac{5(4x-5y+8) - 3(7x+3y-5) + 2(2x-5y-3)}{90} = \frac{3x-44y+49}{90}$$

$$6. \text{ näide. } \frac{a+3}{12a^2-12a} - \frac{3a+1}{30a-30} ?$$

$$12a^2-12a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a(a-1); \quad 30a-30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (a-1); \quad \text{v.ü.n.} = 60a(a-1)$$

$$\frac{5(a+3) - 2a(3a+1)}{60a(a-1)} = \frac{5a+15-6a^2-2a}{60a(a-1)} = \frac{3a+15-6a^2}{60a(a-1)} = \frac{3(a+5-2a^2)}{60a(a-1)} = \frac{5+a-2a^2}{20a(a-1)}$$

$$7. \text{ näide. } \frac{2}{x+3} + \frac{x}{x^2-9} - \frac{1}{2x-6}$$

$$x^2-9 = (x+3)(x-3); \quad 2x-6=2(x-3); \quad \text{v.ü.n.} = 2(x+3)(x-3)$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot (x-3) + 2x - (x+3)}{2(x+3)(x-3)} = \frac{4x-12+2x-x-3}{2(x+3)(x-3)} = \frac{5x-15}{2(x+3)(x-3)} = \frac{5(x-3)}{2(x+3)(x-3)} = \frac{5}{2x+6}$$

$$8. \text{ näide. } \frac{3y-2}{3y^2-27} - \frac{y+1}{y^2+6y+9} - \frac{1}{6y^2-18y} ?$$

$$3y^2-27 = 3(y^2-9) = 3(x+3)(x-3); \quad y^2+6y+9 = (y+3)(y+3); \quad 6y^2-18y = 6y(y-3).$$

$$\text{v.ü.n.} = 6y(y+3)(y+3)(y-3)$$

$$\frac{2y(3y-2)(y+3) - 6y(y+1)(y-3) - (y+3)(y+3)}{6(y+3)(y+3)(y-3)} =$$

$$\frac{6y^3 - 4y^2 + 18y^2 - 12y - 6y^3 - 6y^2 + 18y^2 + 18y - y^2 - 6y - 9}{6y(y+3)(y+3)(y-3)} = \frac{25y^2 - 9}{6y(y+3)^2(y-3)}$$

Ulesandeid:

Nr. 108. $\frac{2a - 3b}{12a} + \frac{3a - 2b}{15a} ?$ Vastused: $\frac{22a - 23b}{60a}$

" 109 $\frac{x + y}{ax - ay} - \frac{x - y}{ax + ay} ?$ $\frac{4xy}{a(x^2 - y^2)}$

" 110 $\frac{3m+2n}{3m-2n} - \frac{24mn}{9m-4n^2} + \frac{3m-2n}{3m+2n} ?$ $\frac{6m - 4n}{3m+2n}$

" 111. $\frac{x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{x + 1}{x^2 - x} ?$ $\frac{1}{x(x-1)^2}$

" 112. $\frac{1+a}{1-a^3} - \frac{1}{1+a^2+a} ?$ $\frac{2a}{1-a^3}$

" 113. $\frac{2a}{a^2+b^2-2ab} + \frac{a+2b}{a^2+b^2+2ab} - \frac{3a-b}{a^2-b^2} ?$ $\frac{b(5a^5+2ab+b^2)}{(a^2-b^2)^2}$

16. Murdude korrutamise ja jagamise.

Algebraaliste murdude korrutamise ja jagamine on täiesti ühesugune murdude korrutamisega ja jagamisega aritmeetikas, s.o. korrutamise puhul korrutame lugejad lugejatega ja nimetajad nimetajatega ning jagamise puhul korrutame ümberpööratud murruga.

1. näide: $\frac{4x^2y^3}{3ab^4} \cdot \frac{9a^2b^2}{8x^3y} = \frac{4x^2y^3 \cdot 9a^2b^2}{3ab^4 \cdot 8x^3y} = \frac{36x^2 \cdot 9a^2b^2}{24x^3yab^4} = \frac{3ay^2}{2b^2x}$

2. näide: $\frac{12x^2y}{5b^3} \cdot \frac{25b^2c}{8xy^2} \cdot \frac{4bx}{15c^2} = \frac{12x^2y \cdot 25b^2c \cdot 4bx}{5b^3 \cdot 8xy^2 \cdot 15c^2} = \frac{2x^2}{cy}$

3. näide: $\frac{x^2-81}{x^2y^2+3xy} \cdot \frac{xy+3}{2x+18} = \frac{(x+9)(x-9)(xy+3)}{xy(xy+3) \cdot 2(x+9)} = \frac{x-9}{2xy}$

4. näide: $9xy \cdot \frac{2x-1}{6xy+3y} \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) = \frac{9xy(2x-1)(4x^2-1)}{3y(2x+1)4x^2} =$

$$= \frac{9xy(2x-1)(2x-1)(2x+1)}{3y(2x+1)4x^2} = \frac{3(2x-1)^2}{4x}$$

5. näide: $\frac{24x^2}{5y} : \frac{16}{25} = \frac{24x^2 \cdot 25}{5y \cdot 16x} = \frac{15x}{2y}$

6. näide: $\frac{x^2+16+8x}{x^2-3x} : \frac{x^2-16}{3x-9} = \frac{(x+4)^2 \cdot 3(x-3)}{x(x-3)(x+4)(x+4)} = \frac{3x+12}{x^2-4x}$

7. näide: $\left(x + \frac{y^2}{x-y}\right) : \left[1 + \frac{xy}{(x-y)^2}\right] = \frac{\left[x(x-y)+y^2\right] \cdot (x-y)^2}{xy \left[(x-y)^2 + xy\right]} = x - y$

8. näide:
$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}{1 + \frac{bc}{ad}} = \frac{\frac{ad - bc}{bd}}{\frac{ad + bc}{ad}} = \frac{(ad - bc) \cdot ad}{bd(ad + bc)} = \frac{a^2d - abc}{abd + b^2c}$$

Ulesanded:

Vastused:

Nr. 114 $(c + \frac{a-bc}{bc}) (b - \frac{a-bc}{b-c}) + \frac{(a-bc)^2}{(b-c)^2} ?$

a

" 115.
$$\frac{\frac{x}{a} - (\frac{a+b}{a} - \frac{b}{x})}{\frac{x}{a} - \frac{c+a}{a} + \frac{c}{x}} ?$$

$\frac{x-b}{x-c}$

" 116
$$\frac{5x^2(m+n) - 15xm - 15xn}{x-3} : (15xm + 5xn)$$

$\frac{m+n}{3m+n}$

" 117
$$\frac{x+2x^2}{x-2x^2} + \frac{1-4x^2}{4x-4x^2-1} ?$$

0

" 118.
$$\frac{15a^2+7ab-2b^2}{3ab} - \frac{12a^2b-3ab^2}{12a^2+5ab-2b^2} + \frac{9ab}{3a+b} ? \quad \frac{15a^2+11ab-b^2}{3a+b}$$

" 119.
$$\frac{x}{3y} - \frac{1}{y} \left[\frac{5xy^2-4xy-x}{(y-1)^2} - \frac{xy+3x}{y-1} \right] ?$$

$\frac{x(5-11y)}{3y(y-1)}$

" 120
$$\frac{a^2+b^2}{a-b} - \left[b - \left(\frac{b^2}{a+b} - \frac{2b^2}{a-b} \right) + \frac{a^2-b^2}{a} - \frac{b^3}{a(a+b)} \right] \quad \frac{2b^2}{a}$$

" 121
$$\left(\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a} \right)^2 - \left(\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a} \right) \left(\frac{a}{2b} - \frac{2b}{a} \right) - \frac{2b}{a} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) ? \quad \frac{6b^2}{a^2}$$

" 122
$$\left[\frac{(x+y)^2}{(a-b)^2} - 2 + \frac{(a-b)^2}{(x+y)^2} \right] : \left(1 - \frac{a-b}{x+y} \right)^2 ? \quad \frac{(x+y+a-b)^2}{(a-b)^2}$$

Kontrolltöö nr. 3

1. $(x^3-7x-6)(x^3-3x^2+4) - (x^3-4x^2+x+6)(x^3+x^2-4x-4) ?$

2. $(3x^2-11xy+7xz+6y^2-7yz+2z^2):(x-3y+2z) ?$

3. $(5x+3y)^2 + (5x-3y)^2 - 2(5x+3y)(5x-3y) ?$

4. $(a^4 - b^4) : (a - b) ?$

5. $\left(3 - \frac{9x-1}{x+3x^2} \right) \cdot \left(x + 1 + \frac{4}{9x-3} \right) ?$

$$6. \quad \frac{a-b}{b} + \frac{2a}{a-b} - \frac{a^3+3ab^2}{a^2b-b^3} \quad ?$$

$$7. \quad \frac{a-b}{a^2-ab+b^2} + \frac{1}{a+b} + \frac{ab}{a^3+b^3} \quad ?$$

$$8. \quad \frac{x-y}{x^2+4xy+4y^2} - \frac{1}{x-2y} - \frac{y}{(x-2y)^2} \quad ?$$

$$9. \quad \frac{\frac{1}{x}}{(1-\frac{1}{x})^2} - \frac{1+\frac{1}{x}}{x-1} \quad ?$$

$$10. \quad \frac{x+2y}{3} \left\{ 4 + x^2 - \frac{\frac{x+3}{x+1} - x - 1}{1 - \frac{2}{x+1}} \right\} : \frac{2\left\{ -\frac{x}{y} - 1 \right\} + 3 \cdot \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} (2 \cdot \frac{x}{y} - 1)} \quad ?$$