

G E O M E E T R I A

Merekooli eelklassi kursus

koostanud Dr. E.Kägi.

I. Geomeetria-elementid ja nende definitsioonid.

1. Sissejuhatus.

Sõna geomeetria tähendab maamõõtmist, sest see teadus arenes maamõõtmisest. Niiluse jõgi tõusis tihti üle kallaste ja ujutas suured maa-alad. Vesi uhtus ära maaomandite piirimärgid, nõnda tuli vee alanemise järele maa jälle uuesti omanikkudele mõõta ja piirimärgid uuesti asetada. Selleks tööks otsiti välja selleaegsed parimad matemaatikud, kes seda tööd võisid toha ja seda tööala arendada. Sellest ajast on pärit ka n.n. Egiptuse kolmnurk, s.o. niisugune kolmnurk, mille küljed on 3,4 ja 5 pikkuse ühikut. Näiteks, kui võtame kolm keppi pikkusega 3,4 ja 5 meetrit ja need otsega kokku naelutame, siis saame täisnurkse kolmnurga. Täisnurkne kolmnurk oli tähtis just selleaegses maamõõtmises. Neid teadmisi hoiti küll salajas, aga ühehaaval sai üks kui teine asi siiski teatavaks ka naaberrahvastele. Nõnda oli 600 aastat e.Kr. Kreekas teada Egiptuse maamõõdu kunst, mida aretati juba edasi puhtteaduslikult. Kolme sajandi kestel arenes see teadus Kreekas juba nii kaugela, et kuulus Kreeka matemaatik Euklides avaldas geomeetria-raamatu "Elementa", mis on aluseks geomeetria õpetamisel tänapäevani.

Praeguse aja geomeetria tegeleb n.n. geomeetriliste kujunditega ja geomeetriliste kehadega. Tasapinnal olevate kujundite õpetust nim. planimetriaks ja ruumis olevate geom. kehade õpetust nim. stereomeetriaks.

2. Tasapind ja sirgjoon.

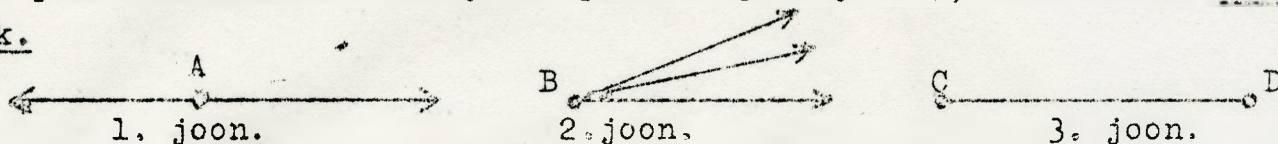
Kui me vaatame üht keha, kas mõnd kasti, lauda, raamatut, palli, kivitükki, vedurit, laeva jne. siis märkame, et kõik need kehad omavad välise pinna, millega nad eralduvad üldises ruumis. Pind võib olla kas tasane või kumer (nõgus), sile või konarlik. Põranda, laua, raamatukaane jne. pinnad on siledad, tasased, neid võime nimetada tasapindadeks. Palli, muna, umariku ahju pind jne. võivad ka siledad olla, kuid mitte tasased, neid pindu nim. kumerpindadeks. Enamikus kehi on piiratud hulga pindadega, näiteks karp omab kuus pinda, neli külgpinda, põhi ja kaas. Umarik ahi omab aga ainult ühe külgpinna ja kaks põhipinda. Pall omab ainult ühe pinna.

Kahe erineva pinna piiriks on jooned. Jooned võivad olla kahte liikide: sirgjooned ja kõverjooned. Näiteks, karbi külgpinnad annavad lõikudes sirgjoonelise serva. Tasapinnad lõikudes annavad alati sirgjoone. Lõikame ühe apelsini pooleks, saame kõverjoonelise serva, sest sel puhul lõikab tasapind kumerat pinda.

Tegelikult elus on meil tagemist piiratud pindadega ja joontega, kuid meie võime ette kujutada niisuguse tasapinna, mis piiramatult igast küljest laieneb. Samuti võime kujutada ka ühe sirgjoone, mida võib piiramatult pikendada mõlemale poole.

Tasapinnal saame igas kohas ja igas sihis tõmmata sirgjooni. Erinevaid jooni saame piirata punktitega. Uhest punktist on võimalik tõmmata piiramatult sirgjooni igas suunas. Kahe punkti vahel võime ainult tõmmata ühe sirgjoone, kuid kõverjooni võime tõmmata piiramatult. Seega kahe punktiga on sirgjoon täielikult määratud. Sellest järgneb, et kaks sirgjoont võivad lõikuda ainult ühes punktis.

Sirgjoone all mõistame piiramatut sirget (1. joon.) Uhest punktist väljuvaid sirgjooni nim. kiirteks (2. joon), s.o. nagu valgusekiired levivad valguse allikast. Kiired on ühest otsast punktiga (punkt E). On aga sirgjoon piiratud mõlemast (3. joon. punktidega C ja D), siis on see sirglõik.



Sirgjoonte joonistamiseks kasutame joonlauda. Et joonlaua serv tõesti sirgjoon on, seda kontrollime nõnda: Joonistame paberil joonlaua serva järgi joone, vahetame joonlaua otsad ja joonistame sama serva järgi uue joone eelmise joone peale; kui need kaks joont täielikult ühtuvad, siis see joonlaua serv on sirge. On joonlaud kontrollitud, võime selle servaga kontrollida tasapinda järgmiselt: Asetame joonlaua serva tasapinna peale ja vaatame, kas see serv ühtub täiesti tasapinnaga. Seda katset kordame tasapinnal mitmes kohas ja mitmes sihis. Kui igal puhul joonlaua serv ühtub tihedalt pinnaga, siis see pind on tasapind. Olles nüüd küllaldaselt selgitanud tasapinda ja sirgjoont anname nende definitsioonid (definitsioon on kindlaks määramine).

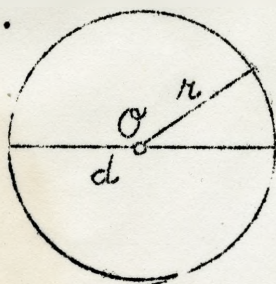
Tasapinnaks nim. pinda, millel sirgjoon asub kõigi oma punktidega ja igas sihis. Sirglõik on lühim kaugus kahe punkti vahel. Tahame saada sirglõiku vabas looduses, siis kasutame pinguli tõmmatud nõõri. Sirgjoone sihi saamiseks põllul asetame teibad otstega maasse ühte ritta, et nad üksteist täieliselt kataksid.

Kõverjoontest käsitleme ainult ringjoont. Ringjoon on kinnine kõverjoon (4. joon.), mille punktid on kõik ühekaugusel ühest kindlast punktist, mida nim. ringjoone keskpunktiks (punkt O). Ringjoone punkti ja tema keskpunkti vahelist kaugust nim. raadiuseks ja tähistame tähega r . Läbi keskpunkti tõmmatud sirglõik kahe ringi punkti vahel nim. diameetrik ja tähistame tähega d . Diameetri pikkus on kaks raadiuse pikkust, $d=2r$. Ringjoone joonistamiseks kasutame sirkli, võib kasutada ka nõõri, mille ühe otsa kinnitame nõelaga keskpunkti ja teise otsa asetame pliiatsi, mille ga tõmbame ringjoone.

Kõigi geomeetriliste konstruktsioonülesannetel võime kasutada joonlauda ja sirkli.

Märkus: Sirgjoone või sirglõigu asemel kasutame tihti ainult sõna sirge, samuti ringjoone asemel ring, ning kõverjoone asemel kõver.

4. joon.



3. Nurk.

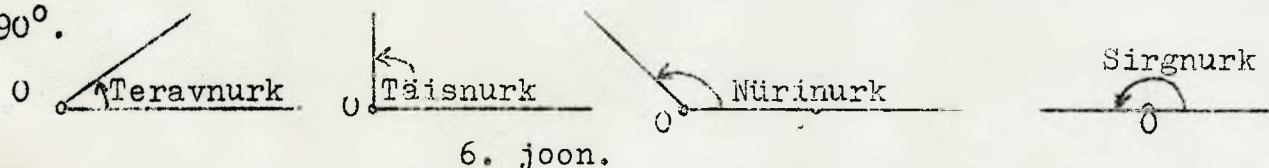
Ühest punktist väljuvad kaks kiirt moodustavad nurga. Punkt, millest kiired väljuvad, nim. nurgatipuks ja nurga moodustajad kiiri nurga haaradeks. Tasapinna osa nurga haarade vahel nim. nurga-väljaks. Nurka tähistatakse märgiga $\wedge$ ja loetakse kolme tähega (5. joon.) AOB või BOA, sest tippu täht peab asuma keskel. Tihti tähistatakse nurka ainult ühe tähega, milleks kasuatakse kreekaakeelseid tähti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jne. (loe: alfa, beeta, gamma, delta). Nurka mõõdetakse täispöörde abil. Täispöörde saame sel teel, et hoiame ühe nurga haara paigal ja laseme teise haara pöörelda nurga tipu ümber kuni ta langeb kokku paigal seisva haaraga, siis on liikuv haar teinud ühe täispöörde (täistiiru). Edasi pööreldes võib haar teha teise, kolmanda, neljanda jne. täispöörde (tiiru). Näiteks, kiirelt tiirlevad mootorid ja dünamomasinad teevad hulk tiire koguni ühe sekundi jooksul.

1/360 osa täispöördest nim. kraadiks. Kraad omakorda jagatakse veel 60-neks osaks, mida nim. minutiks, mis on 1/21600 osa täispöördest. Kraadi minut jagatakse ka veel 60-ks osaks, mida nim. kraadi sekundiks. Põnda on täispööre 360 kraadi või 21600 minutit.

Täispöörde jagamine 360-eks on päritud vanast ajast, sest siis arvati ka aastas olevat 360 päeva ja päike liikus iga päev ühe astme, s.o. kraadi võrra edasi. Hiljem on leitud, et täispöörde jagamine 360-ks ei ole sobiv meie kümnendik arvutussüsteemis, sellepärast on viimasel ajal hakatud kasutama moodust, kus täispööre on jagatud 400-ks osaks, seega veerand täispöördest on 100 kraadi. See n.n. uus kraad on lühem vanast kraadist. 1/100 osa uuskraadist nim. sentikraadiks.

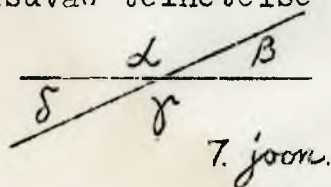
Veerand täispöördest nim. täisnurgaks, mis on 90° (o-kraadi tähis). Vana süsteemi kohaselt ja 100° uues süsteemis. Edaspidi kasutame ainult 360° süsteemi. Pool täispöördest nim. sirgnurgaks (180°) sest sel puhul nurga haarad moodustavad ühe sirgjoone (6. joon). Nurka, mis on väiksem täisnurgast, nim. teravnurgaks ja nurka, mis on suurem täisnurgast kuid vähem sirgnurgast, nim. nürinurgaks.

Kahte nurka, millede summa on 90° , nim. komplement nurkadeks (täiendusnurkadeks), näiteks 60° ja 30° , 55° ja 35° , 72° ja 18° jne. Kahte nurka, millede summa on 180° , nim. suplement nurkadeks, nagu 120° ja 60° , 155° ja 25° jne. Merenduses kasutame väljendusi, nagu laiuse täiendus, deklinatsioonitäiendus, kõrguse täiendus jne. Näiteks, kui Tallinna geograafiline laius on $59^\circ 26'$, siis laiuse täiendus on $30^\circ 34'$, sest summa peab olema 90° .



6. joon.

Kui kaks sirgjoont lõikuvad, siis tekib 4 nurka (7. joon). Kahte nurka, mis asuvad teineteise vastas, nim. tippnurkadeks, need on α ja γ ning



7. joon.

β ja δ . Kahte nurka, mis asuvad teineteise kõrval, nim. kõrvunurkadeks, need on: α ja β , β ja γ , γ ja δ , δ ja α .

Nendest neljast nurgast saame kaks väga tähtsat lauset:

1) Kõrvunurgad on suplementnurgad, s.o. nende summa on 180°

2) Tippnurgad on võrdsed.

Esimese lause tõenäosust võime kergesti näidata, sest kõrvunurkade summa on pool täispöördest, s.o. 180° .

Näiteks, kui üks kõrvunurkadest on $65^\circ 48' 12''$, siis teine nurk on

$$\begin{array}{r} 180^\circ = 179^\circ 59' 60'' \\ - \quad 65^\circ 48' 12'' \\ \hline 114^\circ 11' 48'' \end{array}$$

Et kõrvunurkade summa on 180° , sellest teeme järgmise järelduse: Kui kõrvunurgad on võrdsed, siis kumbki on 90° , s.o. sirged lõikuvad täisnurga all ja me ütleme, et sirged on risti.

Et tippnurgad on võrdsed, see näib küll jooniselt, aga geomeetrias ja üldse matemaatikas ei järku veel sellest, et näib nii olevat, vaid iga nii sugust väljendust (väidet) peab veel ka tõestama.

Inimeste muljed on tihti väga petlikud, näiteks raudteel seistes ja rööbaste suunas vaadates "näib", et rööpmed kauguses ühtuvad, aga tegelikult ei ole see nii. Niisuguseid näiteid võiks tuua palju, kus üks või teine nähtus näib nii olevat, aga tõelikult on hoopis teisiti. Sellepärast peab inimene ühel või teisel viisil tõestama ülestõstetud väidet, et see ka igal teisel juhtumil tõsi oleks, et seda võiks edasises arengus kasutada nagu kindlat tõsiasja.

Geomeetria looja Euklides ehitas geomeetria üles nõnda, et võttis mõned lihtsad asjaolud tõsiasjana-aksioomina.

Need on: 1) Terve on suurem igast tema osast ja võrdub osade summaga.

2) Kui kaks suurust on üksikult võrdsed mõne kolmandaga, siis on nad ka isekeskis võrdsed.

3) Kui kahest võrdsest suurusest üks on suurem (väiksem) kolmandast, siis teine on suurem (väiksem) kolmandast

4) Kui kaks suurust on võrdsed, siis liites (lahutades) mõlemale võrdsed, saame jälle võrdsed.

5) Kui kaks suurust on võrdsed, siis korrutades (jagades) mõlemaid võrdsete suurustega, saame võrdsed.

6) Kui üks suurus on suurem teisest, siis liites (lahutades) mõlemale võrdsed suurused, jääb esimene summa (vahe) suuremaks.

7) Kui jooned ja kujundid muudavad oma asukohta ruumis, siis ei sünni mingit muudatust nende kujus ega suuruses.

8) Antud sirgjoonele on võimalik väljaspool seda sirget antud punktist tõmmata ainult ühe paralleeljoone.

Nende aksioomide varal on geomeetria õpetatud 2000 aastat. Hilisemal ajal on näidatud, et seda viimast aksioomi pole vaja geomeetria õppimisel.

Väljudes nendest aksioomidest võime tõestada uusi lauseid (teoreeme) ja jõuda keeruliste probleemide lahendamisele.

Iga lause puhul on esiteks eeldus ja siis väide, s.o. niisuguste eelduste puhul võime väita seda tõsiasja.

1. Lause. Tippnurgad on võrdsed:

Tõestuseks võime kirjutada (7.joon.):

$$\alpha + \beta = 180^\circ, \text{ kui kõrvunurgad}$$

$$\alpha + \delta = 180^\circ \quad " \quad "$$

Nendes kahes võrrandis on paremad pooled võrdsed, järjestikult peavad ka vasakud pooled olema võrdsed, s.o.

$$\beta = \delta$$

Samal viisil võime tõestada ka, et

$$\alpha = \delta$$

Ulesanded:

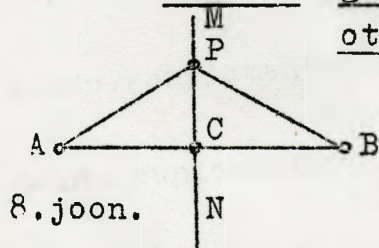
1. Kui suur osa täispöördest on nurk a) 60° , 45° , 30° ; b) $22^\circ 30'$
c) $67^\circ 30'$; d) 135°
2. Leida komplementnurk, kui antud nurk on a) 60° ; b) $22^\circ 30'$
c) $49^\circ 15'$; d) $37^\circ 14' 54''$
3. Leida suplementnurk, kui antud nurk on a) 120° ; b) 54° c) $29^\circ 4'$
d) $12^\circ 54' 16''$
4. Kui suur on nurk kella tunni osuti ja minuti osuti vahel:
a) kell 3; b) kell 6; c) kell 1; d) kell 4; e) kell 10 ?
5. Mitu kraadi on $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ ja $\frac{1}{12}$ täispöördest?

4. Sirglõigu poolitaja ja nurga poolitaja.

Kui üks sirgjoon lõikudes teise sirgjoonega moodustab täisnurga, siis need sirgjooned on risti, öeldakse ka, et üks sirgjoon on teise sirgjoone normaaliks ja sirgete lõikupunkti nim. normaali aluspunktiks. Läbi sirglõigu keskpunkti tõmmatud normaali nim. poolitajaks-normaaliks.

Kui kaks sirget (sirgjoone asemel kasutame ka sõna sirge) lõikuvad teravnurga all, siis need on kaldsirged.

2. Lause. Iga punkt poolitajanormaalil asub ühe kaugusel sirglõigu otspunktidest.



8.joon.

Antud sirglõik AB (8.joon), tema poolitajanormaal MN ja normaali aluspunkt C. Võtame normaali valts ühe punkti P, mille ühendame sirglõigu otspunktidega.

Selle lause puhul on järgmine eeldus: Sirge MN on risti sirglõiguga AB ja poolitab selle, mille kirjutame nõnda:

$$MN \perp AB$$

$$AC = BC$$

$$\text{Väide: } PA = PB ?$$

Tõestuseks murrame joonise mooda CP kokku nõnda, et sirglõik CB ühtub sirglõiguga CA, sest $\angle BCP = \angle ACP$, kui täisnurgad. Punkt A langeb kokku punkt B-ga, sest $AC = BC$. Järjekult langeb ka sirglõik PB täiesti kokku sirglõiguga PA, seega

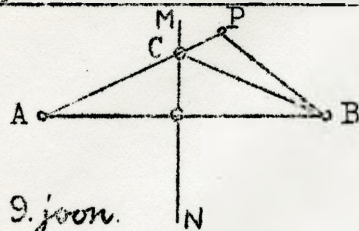
$$PA = PB, \text{ mida oli vaja tõestada.}$$

Sellest lausest teeme järelduse, et $\angle PAC = \angle PBC$ ja $\angle APC = \angle BPC$, s.o. Sirglõigu otspunkte ühendavad jooned mõne poolitajanormaaliga punktiga

moodustavad võrdsed/sirglõiguga kui ka normaaliga.

Võiksime tõestada ka vastupidise lause: Iga punkt, mis asub sirglõigu otspunktidest ühel kaugusel, on poolitajanormaalil

3. Lause. Punkt, mis asub väljaspool poolitajanormaali, on sirglõigu selle otsale lähemal, mis asub punktiga ühel pool normaali.



9. joon.

Olgu antud sirglõik AB ja tema poolitajanormaal MN. Võtame vabalt punkti P, mis asub sirglõigu otsaga B samal pool normaali. Ühendame sirglõikudega punkti P punktidega A ja B (9. joon).

Tõestada: $AP > BP$? ($>$ suurem; $<$ vähem)

$BC + CP > BP$, sest sirge on kõige lühem kaugus kahe punkti vahel

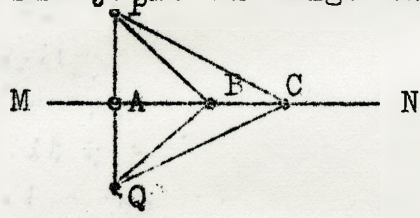
$BC = AC$ 2. lause põhjal.

Asetades BC asemele AC, saame: $AC + CP > BP$

$AP > BP$ mida oligi vaja tõestada.

4. Lause. Kui väljaspool sirget olevast punktist tõmmata sirgele ristjoon ja kaldjooni, siis punkti kõige lühem kaugus sirgest on mööda ristjoont.

Olgu antud sirge MN ja üks punkt P väljaspool sirget, millest tõmbame sirgele MN ristjoone PA ja kaldjooni PB, PC jne. Tõestame, et kaugus mööda ristjoont on kõige lühem (10. joon.)



10. joon.

Pikendame sirget PA teisele poole sama palju, nõnda, et $AP = AQ$ ja ühendame punkti Q punktidega B ja C, saame $BP = BQ$ 2. lause põhjal
 $CP = CQ$ " "

Tõestus: $PB + BQ > PA + AQ$, kuid

$PB + BQ = 2PB$ ja $PA + AQ = 2PA$, nõnda

saame $2PB > 2PA$, siis ka

$PB > PA$, mida oligi vaja tõestada

Samal viisil võime tõestada, et ka $PC > PA$ jne.

Definitsioon: Tasapinnalise kujundi sümmeetriline teljeks nim. sirgjoont, mida mööda murrame kujundi kaks osa kokku nõnda, et need osad üksteist täielikult katavad. Kui kokku murdes kujundi osad üksteist täielikult katavad, siis see kujund on selle murde joone suhtes sümmeetriline.

Sümmeetriline telg on alati poolitajanormaal sirglõikudele, mis ühendavad vastavaid punkte mõlemal pool telge.

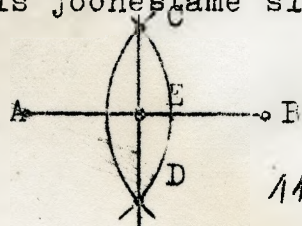
Konstruksioon-ülesanded:

1) Jagada sirglõik pooleks.

See ülesanne on samasugune ülesandega: Konstrueerida (konstruuda) antud sirglõigule poolitajanormaal? Belpool tuletatud lausest (2. lause) teame, et poolitajanormaali punktid asuvad ühe kaugusel sirglõigu otspunktidest, siis joonestame sirkliga punktist A kaare ja punktist B samasuguse kaare

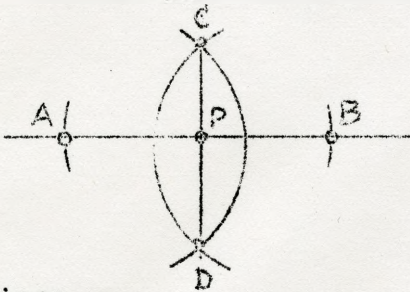
(11. joon). Need kaared lõikuvad punktides C ja D.

Ühendades saadud punktid, saame poolitajanormaali, mis lõikab antud sirglõigu pooleks punktis E



11. joon.

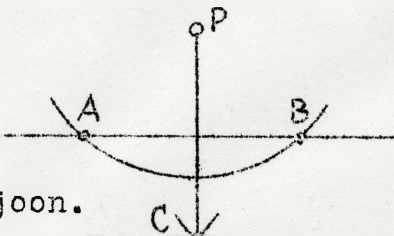
Nr. 2. Antud sirge punktist püstitada selle sirgele ristjoon?



12. joon.

Olgu antud üks punkt P sirgel (12.joon), millest tahame püstitada ristjoone. Selleks joonestame sirkliga punktist P mõlemale poole võrdsed kaared, saame punktid A ja B. Edasi joonestame punktidest A ja B võrdsed kaared, mis lõikuvad punktides C ja D. Ühendades need punktid sirgega, saame otsitava ristjoone.

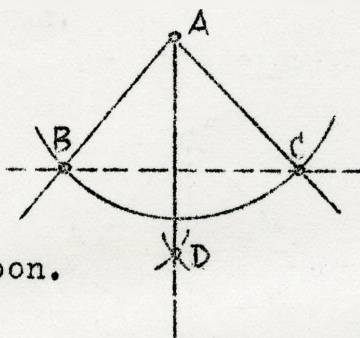
Nr. 3. Antud punktist väljaspool sirget tõmmata selle sirgele ristjoon?



13. joon.

Olgu antud sirge ja punkt P väljaspool sirget. Joonestame sirkliga (13.joon) punktist P paraja kaare, mis lõikab antud sirget punktides A ja B. Edasi joonestame punktidest A ja B võrdsed kaared, mis lõikuvad punktis C. Ühendades punktid P ja C, saame otsitava ristjoone.

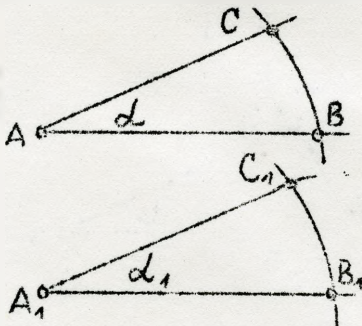
Nr. 4. Leida nurga poolitaja? Nurga poolitajaks nim. sirget mis



14. joon.

jagab antud nurga kaheks võrdseks osaks. Olgu antud nurk tipuga punktis A. Joonestame sirkliga punktist A kaare (14.joon), mis lõikudes nurga haaradega annab punktid B ja C. Edasi joonestame sirkliga punktidest B ja C võrdsed kaared, mis lõikuvad punktis D. Ühendades punktid D ja A saame otsitava nurga poolitaja.

Nr. 5. Konstruuda nurk mis on sama suur kui antud nurk.



15. joon.

Olgu antud nurk tipuga punktis A (15.joon). Võtame vabalt ühe sirge ja temal ühe punkti A_1 , mis on konstruitava nurga tipuks. Joonestame sirkliga punktidest A ja A_1 võrdsed kaared. Joonestatud kaar lõikab antud nurga haare punktides B ja C. Mõõdame sirkliga kauguse BC ja asetame teise kaare peale punkti B_1 , mis lõikab kaart punktis C_1 , seega ongi uus nurk α_1 võrdne antud nurgaga.

nr. 6. Konstruuda ristjoon sirglõigule ühest tema otspunktist!

nr. 7. On antud sirgjoon ja kaks punkti. Leida punkt sirgel, mis asub ühe kaugusel mõlemast punktist!

nr. 8. Antud sirgjoon ja kaks punkti ühel pool sirget. Leida sirgel niisugune punkt, et kauguste summa sellest antud punktideni oleks kõige väiksem!

nr. 9. Tõmmata läbi antud punkti sirgjoon, mis lõikab antud nurgal võrdsed haarad!

nr. 10. Näidata, et iga punkt nurga poolitajal asub ühel kaugusel nurga haaradest!

nr. 11. Leida antud sirgel punkt, mis asub ühel kaugusel kahest lõikuvast sirgest!

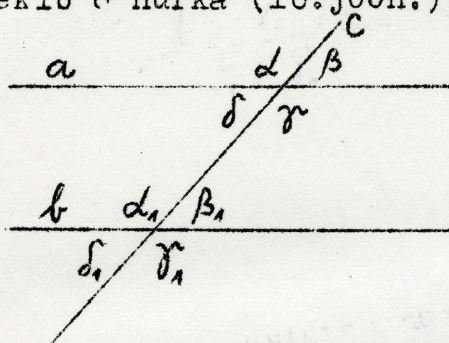
5. Paralleel (E88p) jooned.

Definitsioon: Kaks tasapin alasuvat sirget on paralleelsed, kui nad üksteist ei lõika, kui palju meie neid ka pikendame.

Puhtteaduslikult öeldakse ka nõnda, et kui tasapinnal asuvat kaks sirget lõikuvad lõpmata kauges punktis, siis nad on paralleelsed. Prakstilisest seisukohast väljudes ei ole vaja, et see lõikepunkt just lõpmata kaugel oleks, vaid jätkub isegi kui me ütleme-küllaldaselt kaugel. Näiteks, kui valgusallikas on lähedal, ütleme mõne meetri kaugusel, siis valguse kiired ei ole paralleelsed; viime aga valguse allika järjest kaugemale, muutuvad kiired varsti peaaegu paralleelseiks. Päike ei ole lõpmata kaugel, aga meie võime päikese kiiri isegi suure täpsusega lugeda paralleelseiks.

Viimasel ajal kasutatakse paralleelsuse määramiseks üht uut definitsiooni, mis kõlab järgmiselt: Kahte ühesuunalist sirgjoont nimetatakse paralleelseks.

Kui kahte paralleel sirget a ja b lõigata kolmanda sirgega c, siis tekib 8 nurka (16.joon.), mis on paarikaupa võrdsed. Paralleeljoonte vahel asuvaid nurke nim. sisemisteks ja väljastpool olevaid - välisteks murkadeks. Siin esinevad ka kõrvunurgad ja tippnurgad, nagu kahe sirge lõikumisel, kuid peale selle veel n.n. vastavad nurgad, põiknurgad ja rindenurgad.



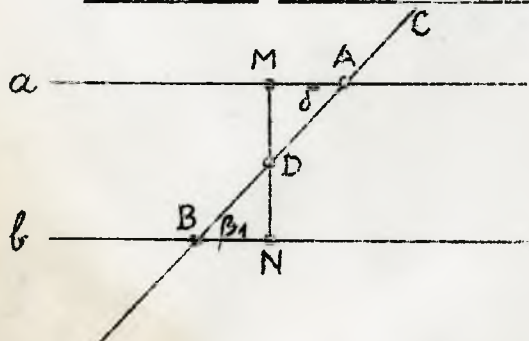
16. joon.

Vastavad nurgad on : α ja α_1
 β " β_1 1
 γ " γ_1 1
 δ " δ_1 1

Vastavad nurgad on täiesti ühteviisi joonestatud, võime ütelda, et need nurgad omavad paarikaupa ühe- ning samasuunalised haarad.

Põiknurkadest on δ ja β_1 ning α ja δ_1 sisemised põiknurgad
 α ja γ_1 ning β ja δ_1 välised põiknurgad
 Rindenurkadest on γ ja β ning δ ja α_1 sisemised rindenurgad
 β ja γ_1 ning α ja δ_1 välised rindenurgad

5. Lause. Kui kahte paralleel sirget lõigata kolmanda sirgega, siis



17.joon.

1. Sisemised põiknurgad on võrdsed ja välised põiknurgad on võrdsed (16.joon.)
2. Vastavad nurgad on võrdsed.
3. Rindenurkade summa paarikaupa on sirg-nurk

1) Esiteks tõestame, et sisemised põiknurgad (17.joon) on võrdsed, s.o.

$$\delta = \beta_1 \quad ?$$

Tõestuseks võtame sirglõigu AB keskel punkti

D, millest tõmbame paralleeljoontele ristjoone MN. Nüüd kujutame, et lõikame kujundi pooleks mööda MN ja pöörame seda pool tiiru ümber punkti D, siis punkt M ühtub punktiga N, sest $DM = DN$. Sirglõik AM peab minema sirglõigu EN peale, sest nurgad punktide M ja N juures on täisnurgad. Sirglõik AD peab minema sirglõigu BD peale, sest sirge on pööratud poole tiiru võrra. Nõnda peab siis punkt A ühtuma punktiga B, seega nurgad δ ja β_1 katavad üksteist täielikult, s.o. nad on võrdsed. Samal viisil võime tõestada ka, et sisemised põiknurgad δ ja α_1 on võrdsed, Seega tõestasime, et sisemised põiknurgad on võrdsed, kuid sisemine ja väline põiknurk on võrdsed, nagu tippnurgad. Nõnda võime öelda, et ka välised põiknurgad on võrdsed, s.o.

$$\alpha = \alpha_1 \quad \text{ja} \quad \beta = \beta_1$$

2) Teine väide, et $\beta = \beta_1$ järgneb esimesest tõestusest, sest

$$\delta = \beta_1 \quad \text{nagu sisemised põiknurgad}$$

$$\delta = \beta \quad \text{nagu tippnurgad}$$

Kahes viimases võrrandis on vasakud pooled võrdsed, järjeklikult peavad ka paremad pooled olema võrdsed, saame

$$\beta = \beta_1$$

Samal viisil tõestame, et $\alpha = \alpha_1$

$$\alpha = \alpha_1$$

3) Kolmandat väidet, et rindenurkade summa on sirgnurk, tõestame järg.

$$\delta + \beta = 180^\circ \quad \text{nagu kõrvunurgad}$$

$$\beta = \beta_1 \quad \text{nagu vastavad nurgad}$$

Kui asetame nurga β tema võrdse nurgaga β_1 siis saame

$$\delta + \beta_1 = 180^\circ, \text{ mida oli vaja tõestada}$$

Samal viisil võime tõestada, et

$$\delta + \alpha_1 = 180^\circ$$

$$\alpha + \delta_1 = 180^\circ$$

$$\beta + \delta_1 = 180^\circ$$

Võime tõestada ka vastupidiselt, s.o. Kui kahte sirget lõigata kolmandaga ja

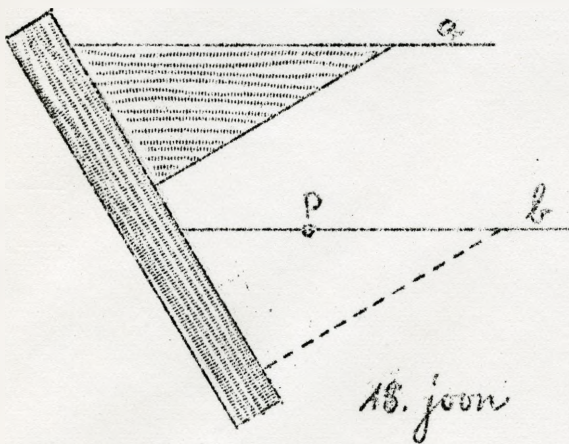
1) Põiknurgad on võrdsed

2) Vastasnurgad on võrdsed

3) Rindenurkade summa on sirgnurk, siis kaks esimest sirget on paralleelsed.

Paralleeljoonte praktiline konstruimine.

Olgu antud sirge a, millele tahame konstruuda paralleelse sirge b läbi punkti P (18.joon.). Asetame kolmnurkse joonlaua ühe serva vastu sirget a ja teise serva vastu joonlauda, siis nihutades kolmnurka tema servad liiguvad paralleelselt. Nihutame kolmnurka nii palju, et see serv, mis oli joone a peal, läheks läbi antud punkti P ja joonestame siis joone b, mis on paralleelne a-ga.



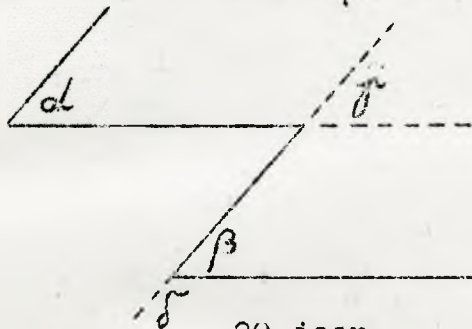
18. joon



19. joon.

6. Lause. Paralleelhaaradega nurgad on võrdsed või nende summa on sirgnurk.

Antud on nurgad: α ja β (20. joon.), mille haarad on paralleelsed.



20. joon

On konstrueeritud ka n.n. paralleel-
joonlaud mis koosneb kahest joon-
lauast ja on tihendatud nõnda, et te-
ma servad liiguvad paralleelselt.
(19. joon) Paralleel-joonlauda kasu-
tame nõnda, et ühe joonlaua välise
serva asetame antud sirge peale ja
hoiame seda paigal ja nihutades teist
joonlauda kuni antud punktini. Kui
aga punkt on nii kaugel antud joonest
et liikuv joonlaud selleni ei ulatu,
siis nihutame esimest joonlauda ja
hoiame teist niikaua paigal, siis
jälle teist joonlauda ja hoiame esi-
mest paigal jne.

Tõestada, et $\alpha = \beta$?
Tõestuseks pikendame nurga α üht
haara ja nurga β üht haara, mis
loikudes annavad nurga γ
 $\alpha = \gamma$ nagu vastavad nurgad paral.
joonte juures
 $\beta = \delta$ " " " " " "

Järjekult peab ka $\alpha = \beta$, mida olk vaja tõestada.

Nurga δ haarad on ka paralleelsed nurga α haaradega, kuid see nurk on
nurga β kõrvunurgaks, seega $\delta + \beta = 180^\circ$
Asetades nurga β tema võrdse nurgaga α , saame
 $\delta + \alpha = 180^\circ$, mida oli vaja tõestada

7. Lause. Kaks nurka, mille haarad on risti, on võrdsed, või nende summa on sirgnurk.

See lause on kergesti tõestatav eelmise lause põhjal, sest kui ühte
rist-haaradega nurka pöörata täisnurga võrra, siis muutuvad tema haarad
paralleelseiks teise nurga haaradega, seega on eelmine lause.

Lõpuks olgu antud tähised, mida kasutame geomeetrias:

$\wedge$	tähistatakse nurka
$\triangle$	" kolmnurka
$\parallel$	" sirgete paralleel seis
$\perp$	" " rist seis
$\cong$	" kongruentsust (ühtivust)
∞	" sarnasust
$=$	loetakse, on võrdne

≠ loetakse ei ole võrdne
> " suurem(terav ots alati väiksema poole"
< " vähem " " " " "

Ulesanded:

- Nr. 12. Kahe paralleel sirge lõikumisel kolmanda sirgega on üks nurk $34^{\circ}15'$. Leida teised nurgad!
- Nr. 13. Joonestada sirgjoon, mis on paralleelne antud sirgega ja läheb läbi antud punkti, kasutades sirklit ja joonlauda.
- Nr. 14. Joonestada antud sirgele paralleel-sirge läbi antud punkti sel teel, et a)konstruuda üks paar võrdseid põiknurke ja b) üks paar vastavaid nurki.

Kontrolltöö nr. 1

1)Suuna määramisel navigatsioonis kasutatakse sõna rumb, mis saadakse nõnda, et täispööre jagatakse pooleks,poole jälle pooleks jne. seda tehakse viis korda. a)Mitmes osas on see täispöördest? b)Mitu kraadi on rumb vanas ja uues süsteemis?

2)Mitu kraadi on nurk kella osutite vahel, kui ta näitab: 2.00(kaks tundi 0 min); b). 2.10 (2 tundi 10 min); c) 2.30 (2 tundi 30 min.) d). 7.35 (7 tundi 35 min.)?

3)Tõestada, et kaks sirget, mis jagavad kõrvunurgad pooleks on risti?

4) : " et sirge, mis jagab nurga pooleks, jagab ka tema tippnurga pooleks!

5)Kaks isikut, kes elavad kusagil ranna lähedal ja omavad ühise paadi soovivad ehitada paadisilla sõnda, et see oleks nende mõlema elukohast ühe kaugusel. Kuidas tuleb teha seda?

6) Määrata punkt, mis asub kolmest antud punktist (mitte ühel sirgel) ühe kaugusel!

7) Konstruuda täisnurk ja jagada see neljaksvõrdseks osaks!

8) Tõesta, et ühest punktist tõmmatud ristjooned nurga haaradele lõikavad võrdsed sirglõigud (tipust arvates)!

9)Konstruuda kahele paralleeljoonele kolmas paralleeljoon, mille kaugus ühest antud paralleeljoonest on kaks korda suurem kaugusest teise antud paralleeljooneni. Mitu niisugust joont saab joonestada?

10).Jagada antud sirglõik kaheks osaks (paralleeljoonte abil) nõnda, et osade suhe on 3 : 4 !

** nurga poolitaja*