

GEOMEETRIA

Merekooli eelklassi kursus.

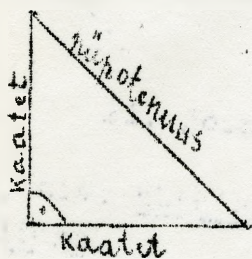
Koostanud Dr. E. Kägi.

II. Kolmnurk.

6. Kolmnurga omadusi.

Kõige lihtsam geomeetriline kujund on kolmnurk; kõige lihtsam, aga selle juures kõige tähtsam, sest kõik keerulisemad kujundid jagane ka kolmnurkadeks, kuna kolmnurga arvutamine on meile kõige kättesaadavam.

Definitsioon: Kolmnurgaks nimetame tasapinna osa, mis on piiratud kolme lõikuva sirgega. Iga kolmnurga osa nim. elementiks; nõnda on iga kolmnurga külge element ja iga nurk on element, seega kokku 6 elementi. Seitsmendaks elemendiks on kolmnurga pind.



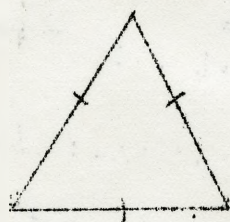
21. joon.



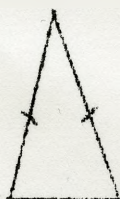
Kolmnurgad jaotame esiteks nurkade järgi täisnurkseteks ja kaldnurkseteks. Täisnurkses kolmnurgas on üks nurk täisnurk (21. joon.). Täisnurka tähistame kaarega, millel on punkt sees. Täisnurkse kolmnurga külgi nim. erinevimelega: Külge, mis on täisnurka

vastas, nim. hüpoteenuksiks, ja külgi, millele vahel täisnurk asub, nim. kaatetiteks.

Teiseks, jaotame kolmnurki külgede järgi võrdkülgsseiks ja võrdhaarseiks.

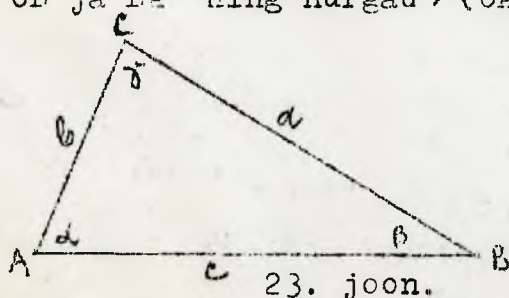


22. joon.



Võrdkülgses kolmnurgas on kõik küljed võrdses, võrdhaarses kolmnurgas kaks külge võrdses, seda nimetatakse ka sarikkolmnurgaks (22. joon.). Kolmnurks tähistatakse nõnda, et igasse hurka kirjutatakse suur täht, näit.

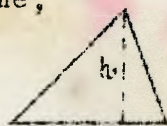
$\triangle ABC$ (23. joon.), mille küljed on AC, CB ja BA ning nurgad $\angle CAB$, $\angle ACF$ ja $\angle CFA$. Parem on siiski kolmnurga nurke tähistada α, β, γ -ga ja külgi a, b, c-ga. Soovitav on veel nõnda tähistada, et nurk



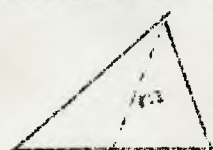
23. joon.

α vastas külge tähistada a-ga
 β " " " b-ga
 γ " " " c-ga

Kolmnurga tipust tõmmatud vastasküljele (või tema pikendusele) ristjoont nim. kolmnurga kõrguseks (24. joon.). Külge, millele ristjoone tõmbame, nim. kolmnurga aluseks. Missugusele küljele ristjoone tõmbame, pole tähtis. Ühendades kolmnurga tippu vastaskülje keskpunktiga, saame sirglõigu,



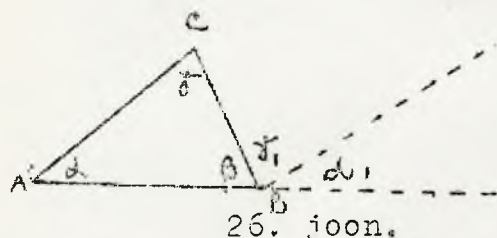
24. joon.



25. joon.

mida nim. küljepoolitajaks (mediaan) (25. joon.). Kolmnurga kõrgust tähistame h -ga ja mediaani m -ga.

8. Lause. Nurkade summa kolmnurgas on kaks täisnurka (sünnurk π , lugeda pii). Tõestuseks tõmbame tipust



B paralleeljoone küljele AC (26. joon.) saame nurgad γ_1 ja α_1 .

$\gamma = \gamma_1$ nagu sisemised põiknurgad paral joon. juures

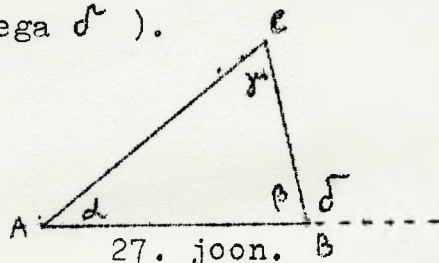
$\alpha = \alpha_1$ " vastavad nurgad " " "

Nõnda on tipu B juures konstrueeritud kõik kolm nurka ja nende summa on sirg-
nurk, nõnda võime kirjutada

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (180^\circ)$$

Sellest lausest teeme järelduse, et kolmnurgas võib olla kas kõik teravnurgad, või üks täisnurk ja kaks teravnurka, või üks nürinurk ja kaks teravnurka.

Teise tähtsa järelduse saame ka samasast lausest, mis kõlab järgmiselt: Kahe nurga summa kolmnurgas võrdub kolmanda tipu juures oleva välisnurgaga. Kui pikendada kolmnurga üht külge, siis tekib sama tipu juures väljaspool kolmnurka nurk, mida nim. välisnurgaks (27. joon. tähistatud tähega δ).

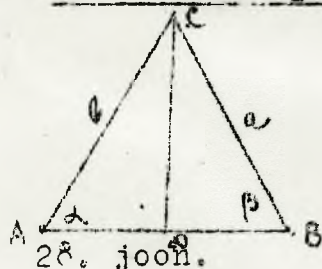


Viimases lauses tõestasime, et kolme nurga summa on sirg-
nurk; kui sellest lahutada β , jääb $\alpha + \gamma$ järele, mis võrdub välisnurgaga δ , saame

$$\alpha + \gamma = \delta$$

Seda võime näidata iga tipu juures oleva välisnurga kohta.

9. Lause. Kolmnurga võrdsete külgede vastas on ka võrdsed nurgad.



Eeldus: $a = b$

Väide $\alpha = \beta$?

Uhendame tipu C vastaskülje keskpunktiga (28. joon.), saame selle külje poolitaja CD mis on aga ühtlasi ka selle külje normaalliks.

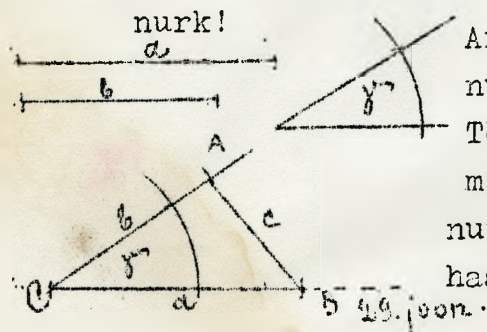
Murdes kujundi kokku mõõda CD, ühtuvad ka nurgad α ja β täielikult, sest nurgad D juures on täisnurgad ja $AD = ED$

Võime ütelda ka ümberpöörduvalt: Kolmnurgas on võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed.

Kui küljed ei ole võrdsed, siis suurema külje vastas on ka suurem nurk ja ümberpöörduvalt.

Konstruksioon-ülesandeid:

Nr. 6. Konstrueida kolmnurk, kui on antud kaks külge ja nende vahel olev nurk!

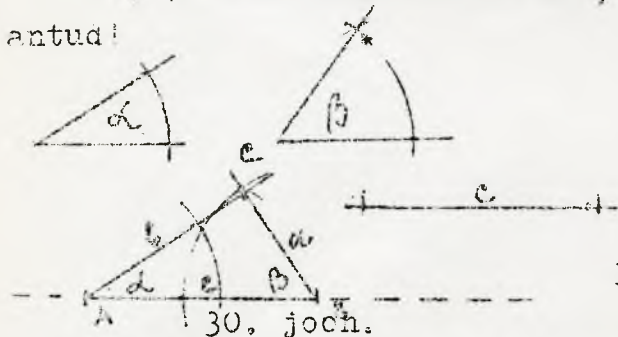


Antud külge a ja külge b , ning nende vahel olev nurk γ (29. joon.).

Tõmbame vabalt sirge, millel mõõdame sirg lõigu CE, mis võrdub a -ga, samuti konstruime punkti C juures nurga, mis võrdub antud nurga γ -ga. Nurga teise haara peale kanname b ja saame punkti A. Uhendades

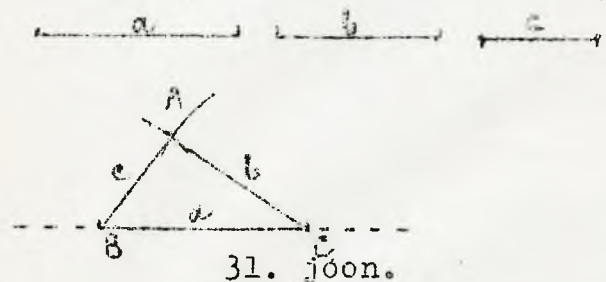
antud A ja B sirgega, on kolmnurk konstrueeritud.

Nr. 7. Konstrueerida kolmnurk, kui kaks nurka ja nende vahel olev külge on antud!



Olgu antud α , β ja c (30. joon). Joonestame vabalt sirge, mille peale kanneme külje c otspunktidega A ja B. Konstruime punkti A juurde nurga α ja punkt B juurde nurga β . Pikendades konstrueeritud nurga külgi kuni lõikumiseni, saame punkti C, seega on kolmnurk antud elementide järel konstrueeritud.

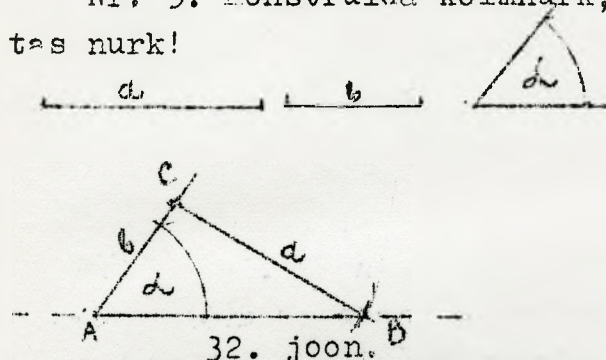
Nr. 8. Konstrueerida kolmnurk, kui antud kolm külge!



Olgu antud küljed a , b , ja c (31. joon). Joonestame vabalt ühe sirge ja asetame sellele külje a otspunktidega B ja C. Punktist C joonestame sirkliga kaare, mille raadius võrdub küljega b ja punktist B kaare, mille raadius võrdub küljega c .

Kaarte lõikpunkt annab kolmnurga tipu A, mille ühendame sirgete punktidega B ja C, saame nõutud kolmnurga.

Nr. 9. Konstrueerida kolmnurk, kui on antud kaks külge ja ühe külje vastas nurk!



Olgu antud küljed a ja b ning külje a vastas nurk α (32. joon). Joonestame vabalt ühe sirge ja võtame sellel punkti A, mille juurde konstruime antud nurga α . Nüüd mõõdame nurga ühele haarale antud külje b , mille otspunktid on AC. Joonestame punktist C kaare raadiusega a , mis lõikab esmalt

võetud sirget punktis B. Märkus: Kahe külje ja ühe külje vastasnurgaga on kolmnurk määratud, kui antud nurk on suurima külje vastas; on antud külge väiksema külje vastas, näiteks, kui asetada konstrueeritud nurga haarale külge a ja joonestada kear raadiusega b , siis lõikab see kaar sirget kahes punktis, seega on tulesandel kaks lahendust.

7. Kolmnurkade ühtivus. (kongruentsus).

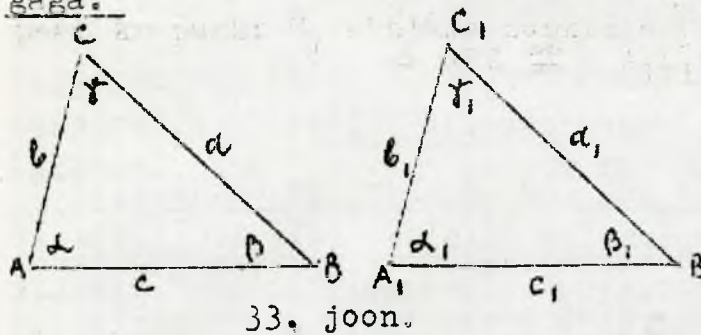
Aritmeetikas ja algebras tarvitatakse sõna võrdub, s.o. üks suurus võrdub teisega. Kolmnurkade puhul ei jätku veel sellest, kui meie ütleme üks kolmnurk võrdub teise kolmnurgaga, sest kolmnurgal on kolme liiki suurusi: sirglõigud, nurgad ja pind. Näiteks, kui ühe kolmnurga nurgad on võrdsed teise kolmnurga nurkadega, siis ei ütle see veel, et ka küljed ning pind võrdsed oleksid. Samuti, kui ühe kolmnurga pind võrdub teise kolmnurga pinnaga, siis ei ole sellega veel määratud, et ka nurgad ja küljed oleksid võrdsed. Kui me aga ütleme, et kaks kolmnurka on ühtivad (kongruentsed), siis peavad ühe kolmnurga kõik elemendid võrduma teise kolmnurga vastavate elementidega, s.o. kui me asetame ühe kolmnurga teise kolmnurga peale, siis peavad need täiesti ühtuma.

Kolmnurkade ühtivus võib esineda neljal juhtumil.

10. Lause. (I kongruentsuse lause)

Kolmnurgad on ühtivad, kui ühe kolmnurga kaks külge ja nende vahel

olev nurk on võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja nende vahel oleva nurgaga.



33. joon.

Olgu antud kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ (33.joon.).

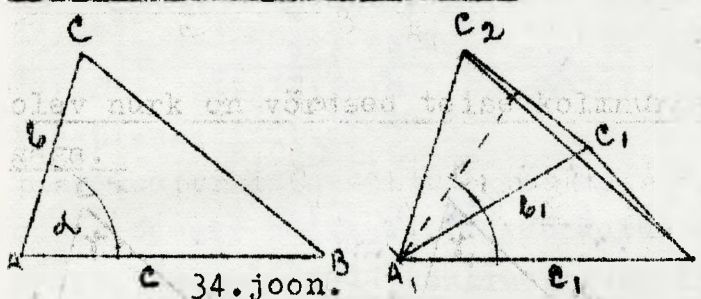
Eeldus: $b = b_1$ Väide: $\beta = \beta_1$?
 $c = c_1$ $\gamma = \gamma_1$?
 $\alpha = \alpha_1$ $a = a_1$?

Töestuseks asetame ühe kolmnurga teise kolmnurga peale nõnda, et punkt A langeb kokku A_1 -ga ja nurga α_1 haarad langevad kokku nurga α haaradega. Punkt B_1 langeb kokku punktiga B , sest $c = c_1$; samuti punkt C_1 langeb kokku punktiga C , sest $b = b_1$. Sellega kolmnurga kõik elemendid: küljed, nurgad ja pind ühtuvad, mida oligi vaja tõestada.

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$$

11.Lause.

Kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdsed teise kolmnurga kahe küljega ja nurk nende vahel esimeses kolmnurgas on suurem vastavast nurgast teises kolmnurgas, siis kolmas külg esimeses kolmnurgas on suurem kolmandast küljest teises kolmnurgas.



34.joon.

Olgu antud kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ (34.joon.)

Eeldus: $b = b_1$ Väide: $a > a_1$

$c = c_1$

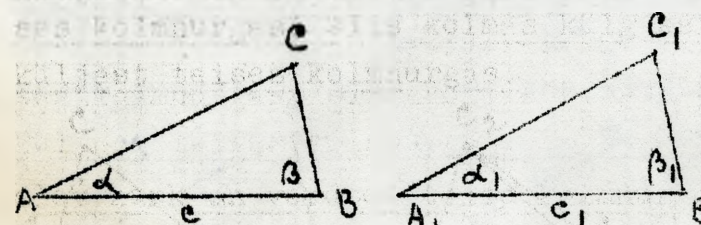
$\alpha > \alpha_1$

Töestuseks konstruime (34.joon.) teise kolmnurga tipu A_1 juures nurga α ja asetame tema haarele külje b_1 , saame punkti C_2 mida ühendame sirgetega punktidega C_1 ja B_1 . I kongruentsuse lause põhjal on $\triangle A_1B_1C_2 \cong \triangle PCA$ seega $B_1C_2 = BC$. Edasi tõmbame tipust A sirglõigule C_1C_2 poolitaja-normaali, seega võime 3.lause põhjal kirjutada: $B_1C_2 > B_1C_1$ asetades B_1C_2 tema võrdsega BC

$BC > B_1C_1$ või $a > a_1$, mida oli vaja tõestada.

12.Lause. (II kongruentsuse lause)

Kolmnurgad on ühtivad, kui ühe kolmnurga kaks nurka ja nende vahel olev külg on võrdsed teise kolmnurga kahe nurga ja nende vahel oleva küljega.



35. joon.

Olgu antud kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ (35.joon.).

Eeldus: $\alpha = \alpha_1$ Väide: $\beta = \beta_1$ $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$
 $c = c_1$

Asetades kolmnurgad üksteise peale nõnda, et külg c ühtub küljega c_1 nurk α_1 ühtub siis nurgaga α ja nurk β_1 nurgaga β . Järelikult

peab ka punkt C_1 -ühtuma punktiga C , seega kolmnurgad on ühtivad.

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$$

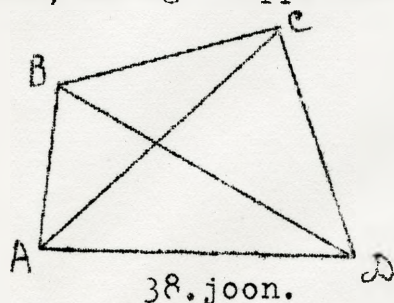
Nr. 24. Konstruuda kolmnurk, kui antud on kaks külge ja kolmandale küljele on tõmmatud kõrgus.

Nr. 25. Konstruuda kolmnurk, kui on antud üks külge ja selle külje poolitaja ning selle küljele on tõmmatud kõrgus.

III. Hulknurk.

8. Nelinurk ja tema omadusi.

Definitsioon. Pinna osa, mis on piiratud nelja lõikuva sirgega, nim. nelinurgaks. Nelinurgal on neli külge ja neli nurka. Nelinurka tähistame nõnda, et iga tippu asetame tähe, näiteks nelinurk AFCD (38.joon.)



Sirgeid, mis ühendavad nelinurga vastasolevaid tippe, nim. diagonaalideks. Nelinurgal saab tõmmata kaks diagonaali AC ja BD.

Nurkade summa nelinurgas on kaks sirgnurka. (neli täisnurka)

Seda saame kergesti näidata, kui tõmbame ühe diagonaali, mis jagab nelinurga kaheks kolmnurgaks ja kummagi kolmnurga nurkade summa on sirgnurk. Nelinurgad jaotame esiteks kahte rühma: 1) ristkülikuteks

2) paralleelogrammideks

Ristkülik on nelinurk, mille küljed on risti. Paralleelogramm on nelinurk, mille vastasküljed on paralleelsed.

Ristküliku küljed on alati paralleelsed, kuid paralleelogrammi küljed ei tarvitse risti olla.

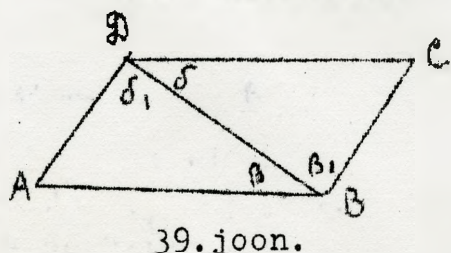
Ristkülik, mille küljed on võrdsed, nim. ruuduks.

Paralleelogramm, mille küljed on võrdsed, nim. kaldruuduks või rombiks

Nelinurk, mille üks paar vastaskülgi on paralleelsed, nim. trapetsiks.

9. Nelinurkade kohta käivad laused.

15. Lause. Paralleelogrammi vastasküljed on paralleelsed.



Eeldus: $AB \parallel DC$ Väide: $AB = DC$
 $AD \parallel BC$ $AD = BC$

Tõestuseks tõmbame diagonaali DB, mis jagab paralleelogrammi kaheks ühtivaks kolmnurgaks (39.joon.)

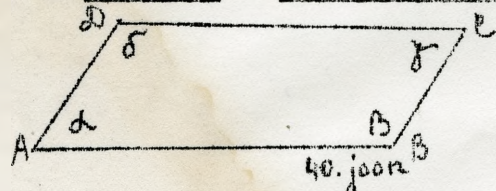
$\beta = \delta$ ja $\beta_1 = \delta_1$ nagu põiknurgad paral. joon. juures külge BD on ühine. Seega on kolmnurkades ABD ja DBC kaks nurka ning vahel olev külge võrdsed, järelikult II kongruentsuse lause põhjal on kolmnurgad ühtivad.

$$\triangle ABD \cong \triangle DBC$$

Sellest aga järgneb, et $AB = DC$ ja $AD = BC$, mida oligi vaja tõestada.

Võime tõestada ka vastupidiselt: Kui nelinurga vastasküljed on võrdsed, siis nelinurk on paralleelogramm.

16. Lause. Paralleelogrammi vastasnurgad on võrdsed.



Olgu antud paralleelogramm AFCD (40.joon).

Tõestame, et $\alpha = \gamma$
 $\beta = \delta$

Tõestus: $\alpha + \beta = 180^\circ$ nagu röönnurgad per. joon.

$$\gamma + \beta = 180^\circ \quad " \quad "$$

Neid võrrandeid võib ka kirjutada nõnda: $\alpha = 180^\circ - \beta$

$$\gamma = 180^\circ - \beta$$

Võrrandite paremad pooled on võrdsed, järelikult peavad võrduma ka vasakud pooled, seega $\alpha = \gamma$

Samuti võime tõestada, et ka $\beta = \delta$, seega on lause tõestatud.

Võime ka vastupidist tõestada; s.o. Kui nelinurga vastasnurgad on võrdsed, siis nelinurk on paralleelogramm.

17. Lause. Kui nelinurga kaks külge on paralleelsed ja võrdsed, siis nelinurk on paralleelogramm.



41. joon.

Antud nelinurk ABCD (41.joon.)

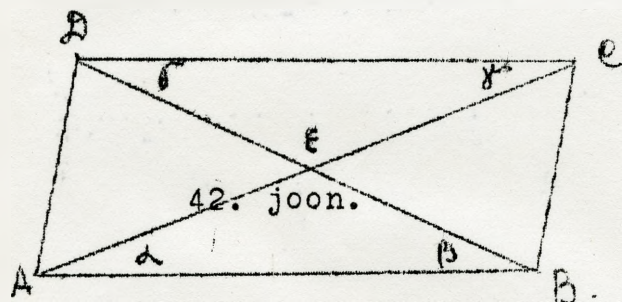
Eeldus: $AB = DC$ Väide: $AD \parallel CE$

$AE \parallel DC$

Tõestuseks tõmbame diagonaali AC, mis jagab nelinurga kaheks ühtivaks kolm-

nurgaks I kongruentsuse lause põhjal, sest üks külge on ühine ja nurk $\alpha =$ nurga γ , kui sisemised põiknurgad paralleeljoonte juures ning küljed AB ning DC on võrdsed eelduse põhjal, järelikult nurk β võrdub nurga δ -ga seega $AD \parallel CE$, mida oli vaja tõestada

18. Lause. Paralleelogrammi diagonaalid poolitavad üksteist.



42. joon.

Antud paralleelogramm ABCD, mille

diagonaalid lõikuvad punktis E (42.joon)

Tõestame, et $AE = EC$

$BE = ED$

Tõestus: $\triangle ABE \cong \triangle DEC$ (II kongru.lause)

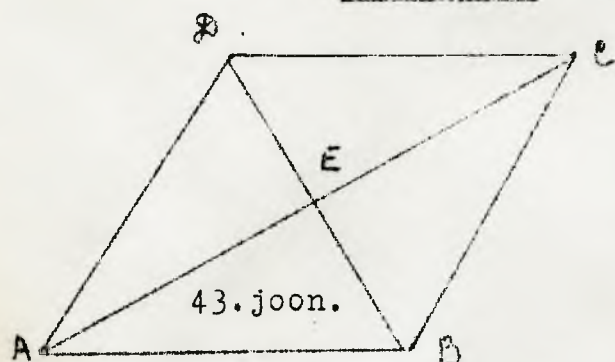
$$\alpha = \gamma$$

$$\beta = \delta$$

$AB = DC$, nagu paralleelogrammi vastasküljed

Järelikult $AE = EC$ ja $BE = ED$, mida oligi vaja tõestada.

19. Lause. Rombi diagonaalid on vastastikku risti (ja poolitavad üksteist).



43.joon.

Antud on romb ABCD (43.joon)., mille diagonaalid lõikuvad punktis E.

$\triangle AEB \cong \triangle DEC$ (III kongruent. lause), sest külge BE on ühine

$AE = EC$ rombi definitsiooni põhjal

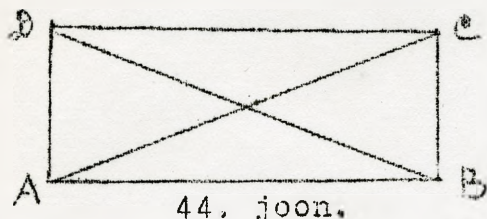
$AE = CE$ eelmise lause põhjal

Järelikult $\triangle AEB = \triangle DEC$ ja kui kõrvunurgad on võrdsed, siis mõlemad on

täisnurgad, seega rombi diagonaalid on risti, mida oligi vaja tõestada.

20. Lause. Ristküliku diagonaalid on võrdsed.

Antud on ristkülik ABCD, mille diagonaalid on BD ja AC (44. joon).



44. joon.

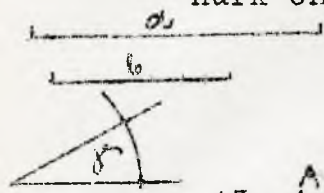
Tõestada. $AC = BD$

$\triangle ABD \cong \triangle ABC$ I kongruent. lause põhjal sest külge AB on ühine ja $AD = BC$
15. lause põhjal $\angle DAB = \angle CBA$ kui täisnurgad ristküliku juures.

Kui kaks kolmnurka on kongruentsed, siis võrdsete nurkade vastas on võrdsed küljed, seega $AC = BD$, mida oligi vaja tõestada.

Konstruksioon ülesanded.

Nr. 10. Konstruuda paralleelogramm, kui kaks külge ja nende vahel olev nurk on antud.



45. joon.

Esiteks konstruime kahe külge ja nende vahel oleva nurga abil

kolmnurga, siis selle kolmnurgale konstruime ühtiva kolmnurga (45. joon)

Konstruimist teeme nõnda: Joonestame külge a, mille ühe otspunkti juures joonestame nurga α , selle nurga

teise haara peale mõõdame teise paralleelogrammi külge b. Edasi joonestame punktist D kaare raadiusega a ja punktist B kaare raadiusega b. Nende kaarte lõikpunkt annab paralleelogrammi neljanda tipu C.

U l e s a n d e d.

Nr. 26. Konstruuda paralleelogramm, kui mõlemad diagonaalid ja nende vahel olev nurk on antud!

Nr. 27. " " kui on antud kaks külge ja üks diagonaal!

Nr. 28. Tõestada, et paralleelogrammi ühe külge juures asuvate nurkade poolitajad on üksteisega risti!

Nr. 29. Tõestada, et sirglõik, mis ühendab paralleelogrammi vastasküljed läheb läbi diagonaalse lõikpunkti, jagatakse selle lõike punktiga pooleks!

Nr. 30. Läbi antud punkti tõmmata sirgjoon, mis lõikab antud paralleelogrammi kaheks kongruentseks osaks!

Nr. 31. Tõestada, et kui ühendada nelinurga külgede keskpunkte sirgetega, siis tekib paralleelogramm!

Nr. 32. Tõestada, et kui ühendada ristküliku külgede keskpunkte sirgetega, siis tekib romb!

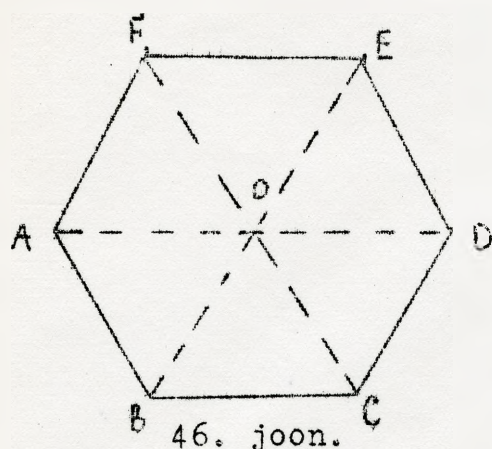
Nr. 33. Antud neljast sirglõigust konstruuda trapets, kui suurim ja väikseim sirglõik on paralleelsed!

10. Korrapärane hulknurk.

Hulknurki, millel on rohkem kui neli nurka, me üksikult ei käsitle, vaid ainult n.n. korrapäraseid hulknurki. Korrapäraseks nimetame niisugust hulknurka, mille kõik küljed on võrdsed ja ka kõik nurgad on võrdsed.

Võrdkülgset kolmnurka nimetame ka korrapäraseks kolmnurgaks, sest tema nurgad on ka võrdsed. Nelinurka, millel on võrdsed küljed ja nurgad, nim. korrapäraseks nelinurgaks, mis on eelpool defineeritud ruut.

21. Lause. Korrapärase hulknurga poolitajad lõikuvad ühes ja samas punktis - hulknurga keskpunktis.



Olgu antud korrapärane hulknurk ABCDEF (46. joon.). Tõmbame esiteks nurga poolitajad tipust A ja B, nad lõikuvad punktis O. Edasi ühendame punkti O sirgetega punktidega C, D, E jne. Tõestame, et sirglõigud OC, OD, OE jne. on ka nurga poolitajad, s.o. OC poolitab nurga tipus C
OD " " " D jne.

Tõestus: $\triangle ABO \cong \triangle BCO$ I kongruentsuse

lause põhjal, sest külge OF on ühine, küljed AB ja BC on võrdsed korrapärase hulknurga definitsiooni põhjal ja $\angle AFO = \angle BCO$, siis peab ka

$$\angle BCO = \angle FAO$$

Nurgad tipus A ja C on definitsiooni põhjal võrdsed ja nurk BAO on pool nurgast tipu A juures, järjekult on nurk BCO ka pool nurgast tipu C juures. Samal viisil võime tõestada ka et nurk CDO on pool tipu D juures olevast nurgast, kasutades tõestuseks ühtivaid kolmnurki $\triangle BCO$ ja $\triangle CDO$ jne.

Edasi võime tõestada, et ka hulknurga külgede poolitajad lõikuvad hulknurga keskpunktis.

~~Viimasest~~ Viimasest lausest saame teha mitu järeldust:

- 1). Korrapärase hulknurga nurga poolitajad jagavad hulknurga kongruentseteks kolmnurkadeks.
- 2). Läbi korrapärase hulknurga tippude võime joonestada ringi, mille keskpunktiks on hulknurga keskpunkt; seda ringi nim. ümberjoonestatud ringiks.
- 3). Iga korrapärase hulknurga sisse võib joonestada ringi mida nim. sissejoonestatud ringiks.

22. Lause.

Korrapärase hulknurga nurk võrdub $\pi - \frac{2\pi}{n}$

Seda tõestame järgmiselt: Korrapärase hulknurgas on niipalju ühtivaid kolmnurke, kuipalju on hulknurgal külgi. Iga kolmnurga nurkade summa on π , seega $n \cdot \pi$, kus n on hulknurga külgede arv. Sellest summast peame veel lahutama nurkade summa keskpunkti ümber, mis on 2π , seega nurkade summa hulknurgas on

$$n \cdot \pi - 2\pi$$

Jagame selle summa nurkade arvuga, saame $\frac{n\pi - 2\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n} = \pi(1 - \frac{2}{n})$

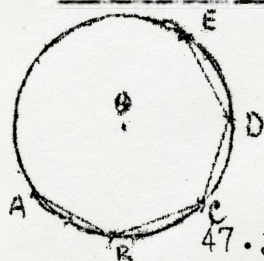
Võttes sirgnurga asemel 180° , saame $180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = 180^\circ(1 - \frac{2}{n})$

Kasutades viimast valemit, arvutame hulknurga nurkade suuruse kraadides, kui külgede arv : $n = 3, 4, 5, \dots$

n	3	4	5	6	7	8
$180^\circ(1 - \frac{2}{n})$	60°	90°	108°	120°	$128^\circ, 57$	135°

Konstruksioon-ülesanded

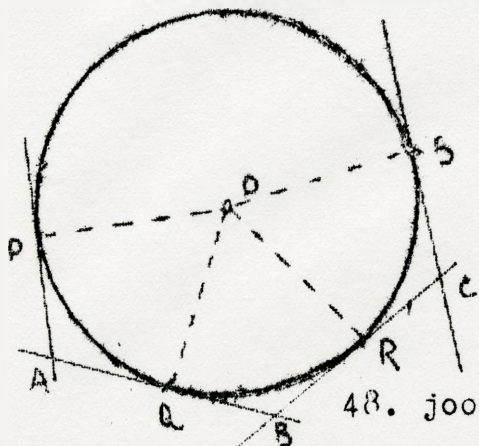
Nr. 11. Antud ringi sisse joonestada n-külgne korrapärane hulknurk.



47. joon.

Joonestame vabalt võetud raadiusega ringi (47. joon). Jagame ringi kaare n võrdseks osaks, saame punktid A; B; C; E jne., mis ühendame sirgetega, saame korrapärase hulknurga.

Nr. 12. Antud ringi ümber joonestada korrapärane n-külgne hulknurk.

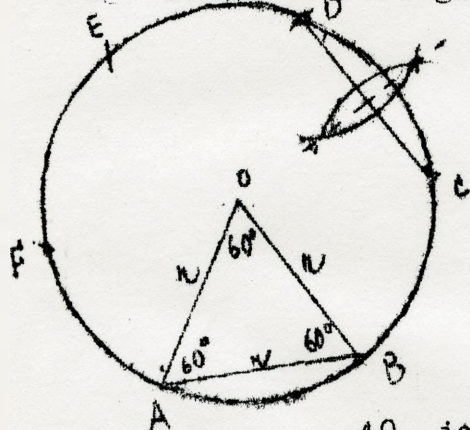


48. joon.

Joonestame ka vabalt võetud raadiusega ringi, mille jagame n võrdseks osaks, saame punktid P, Q, R, S, T jne. Ühendame saadud jaotuspunktid ringi keskpunktiga, saame ringi raadiused PO, QO, RO, SO jne. Edasi konstruime nende raadiustele ristjooned vastavalt punktides P, Q, R jne. Need ristjooned annavad lõikudes otsitava hulknurga tipud A, B, C jne. (48. joon.).

Nr. 13. Jagada ring 3-meks, 6-ks, 12-neks, 24-jaks jne.

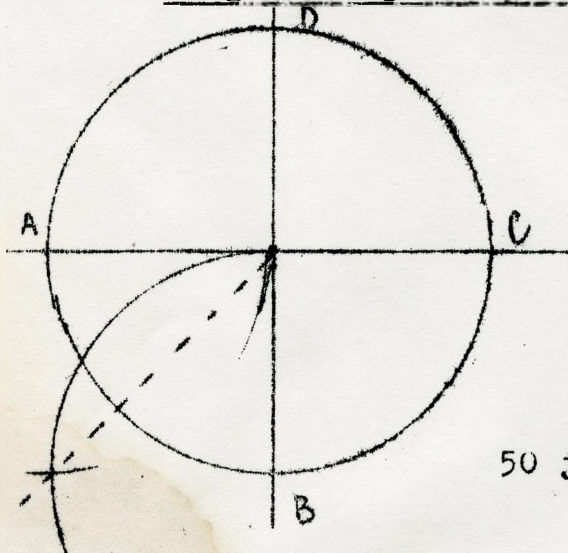
Kõige lihtsam on ringi jagada 6-ks, sest sel puhul on ringi raadius



49. joon.

võrdne sissejoonestatud korrapärase hulknurga küljega (49. joon). Seda võime tõestada nõnda, et konstruime ühe kolmnurga ABO, mis on võrdkülgne kolmnurk, sest kõik nurgad on võrdsed ja võrduvad 60° sel põhjusel, et korrapärase kuusnurga nurk on 120° , seega pool nurka 60° . 12-neks jagamisel poolitame veel selle 6-ks jagamisel saadud kaare. 24-jaks jagamisel poolitame kaare, mille saime 12-neks jagamisel jne.

Nr. 14. Jagada ring 4-ks, 8-saks, 16-neks, 32-ks jne.



50. joon.

Ringi jagamine neljaks toimub sel teel, et joonistame läbi keskpunkti kaks risti sirget (50. joon), mis lõikuvad ringi neljaks võrdseks osaks. Tahame jagada nüüd ringi 8-saks, siis jagame selle kaare, mille saime 4-ks jagamisel, veel pooleks. 16-neks jagamisel jagame selle kaare veel pooleks, mille saime 8-saks jagamisel jne.

K o n t r o l l t ö ö n r . 2 .

1). Joonestada võrdhaarne kolmnurk, kui võrdsed haerad on 10 cm ja nurk nende vahel on pool täisnurgast!

2). Joonestada võrdhaarne kolmnurk, kui alus on 8 cm ja nurgad aluse juures on 60° !

3). Joonestada täisnurkne kolmnurk, kui hüpotenuus on 10 cm ja üks kaatet on 6 cm!

4). Tõesta, et kui tõmmata võrdhaarse kolmnurga aluse ühest otspunktist ristjoon ühele haarale, siis see ristjoon moodustab alusega nurga, mis on pool kolmnurga tipus olevast nurgast!

5) Tõesta, et kui täisnurkne kolmnurga üks terav nurk on 30° , siis see kolmnurk on pool võrdkülgsest kolmnurgast ja väiksem kaatet on pool hüpotenuusist!

6). Jagada täisnurk kolmeks võrdseks osaks!

7). Joonestada kolmnurk, kui kolmnurga kaks külge ja ühele küljele tõmmatud kõrgus on antud!

8). Kaks sirglõiku lõikavad üksteist pooleks. Tõesta, et sirged, mis ühendavad sirglõikude otspunkte, moodustavad paralleelogrammi. Missugune paralleelogramm on siis

a) kui antud sirglõigud on võrdsed ?

b) " " " " risti ?

9). Tõesta, et kui ühendada sirgega kolmnurga kahe külje keskpunktid, siis see sirge on paralleelne kolmnurga kolmanda küljega ja on pool sellest!

10). Tõesta, et kui ühendada sirgetega rombi külgede keskpunktid, siis tekib ristkülik!