

G E O M E E T R I A.

Merekooli eelklassi kursus.  
Koostanud Dr. E.Kägi.

IV. R I N G .

11. Geomeetrilised kohad.

Tasapinnal võime võtta vabalt punkte niipalju kui soovime, aga need punktid on kõik korraldamata, ilma mingi süsteemita. Kui me aga vaatleme üht punktide rida, mis täidab üht kindlat tingimust, siis need punktid määravad koha, mida nimetatakse geomeetriliseks kohaks. Näiteks, ringjoon on punktide geomeetriline koht, mis täidab tingimust, et kõik tema punktid on ühe kaugusel ühest kindlast punktist, mida nimetame ringi keskpunktiks.

Mitte ainult ringjoon pole punktide geomeetriliseks kohaks, vaid neid esineb hulk teisi, milledest vaatleme mõnda:

Sirglõigu poolitajannormaal on punktide geomeetriliseks kohaks, kus iga punkti kaugus mõlemast sirglõigu otsast on ühesugune.

Nurga poolitaja on punktide geomeetriliseks kohaks, kus iga punkti kaugus mõlemast nurga haarast on ühesugune.

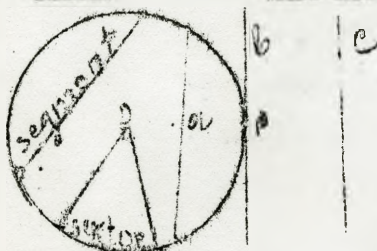
Kaks paralleeljoont moodustavad niisuguse tingimuse, et ühe joone kõik punktid on teisest joonest ühe kaugusel, samuti teise joone kõik punktid on ühe kaugusel esimesest joonest.

Kui joonestame ühe sirgele ühel kaugusel mõlemale poole paralleeljooned, siis need on punktide geomeetrilisteks kohtadeks, sest nende punktide kaugus on ühesugune esimesest sirgest, jne.

12. Laused ringi kohta.

23. Lause: Kaks ringi on ühtivad, kui nende raadiused on võrdsed. Tõestuseks asetame ühe ringi teise peale nõnda, et keskpunktid langevad ühte, siis ühtuvad ka ringjooned, sest raadiused on võrdsed. Samuti peavad siis ka pinnad katma üksteist täielikult. Seega ringi raadiusega on ring täiesti määratud.

Peale ringi raadiuse esinevad ringi juures veel mitmed terminid, nagu ringi kõõl, ringi puutuja, ringi segment ja ringi sektor. (51. joon.)



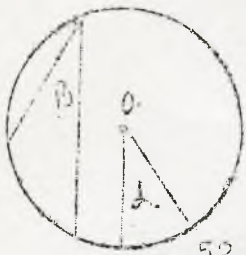
51. joon.

Kui me joonestame ringi ja ühe sirge, siis esineb kolm juhtumit:

- a) sirge lõikab ringi (51. joon. a)
- b) " puutub ringi (51. joon. b)
- c) " asub kogu ulatuses väljaspool ringi (51. joon. c)

Kui sirge lõikab ringi, siis on temal ringiga kaks ühist punkti ja sirglõiku ringi sees nimetame kõõluks. Kõige pikem kõõl läheb läbi ringi keskpunkti ja on ringi diameetrik (lähimõõt)

Kui sirge puutub ringi, siis on temal ainult üks ühine punkt ringiga ja seda punkti nim. puutepunktiks. ( P )



52. joon.

Ringi pinna osa, mis on piiratud ringi kaarega ja kõõluga, nim. segmendiks. Ringi pinna osa, mis on piiratud ringi kaarega ja kahe raadiusega, nim. sektoriks. Pool ringi pinda võib nim. segmendiks kui ka sektoriks.

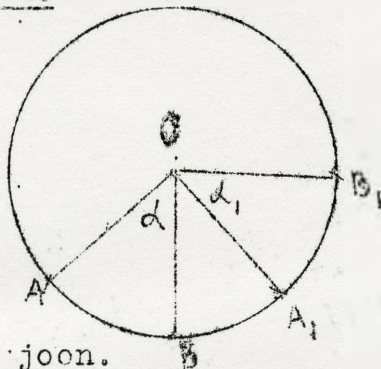
Ringi diameeter jagab ringi kaheks võrdseks osaks ja on ringi sümeetriateljeks.

Peale selle esineb ringis kaks isenimelist nurka: tsentrinurk ja piirdenurk.

Tsentrinurgaks nimetame nurka kahe raadiuse vahel, seeega selle nurga tipp on ringi keskpunktis (tsentris) (52. joon  $\alpha$ ).

Piirdenurgaks nimetame nurka kahe kõõlu vahel, mis väljuvad ringi ühest ~~punktist~~ punktist (52. joon.  $\beta$ ), selle nurga tipp asub ringi kaarel.

24. Lause: Võrdsed tsentrinurgad ühes ja samas ringis omavad ka võrdsed kaared.



53. joon.

Olgu antud kaks tsentrinurka  $\alpha_1$  ja  $\alpha$  (53. j)

Eeldus:  $\alpha_1 = \alpha$

Väide: kaar  $AB =$  kaarega  $A_1B_1$

Tõestuseks pöörame sektori  $A_1OB_1$  keskpunkti O ümber nõnda, et see ühtub sektoriga AOB. Sektorid katavad üksteist täielikult, sest nurgad on võrdsed ja nurga haarad on ka võrdsed kui ühe ja sama ringi raadiused.

Punkt  $A_1$  ühtub punktiga A ja punkt  $B_1$  ühtub punktiga B. Järelikult kaar  $A_1B_1$  ühtub täielikult kaarega AB, mida oligi vaja tõestada.

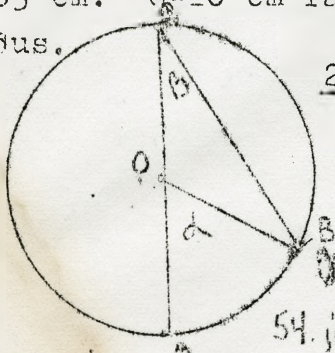
Võime tõestada ka vastupidise lause, s.o. Võrdsed kaared ühes ja samas ringis omavad ka võrdsed tsentrinurgad.

Samuti võime tõestada, et suurem tsentrinurk ühes ja samas ringis omab suurema kaare ja väiksem tsentrinurk väiksema kaare.

24. lausest teeme järelduse, et tsentrinurka võime mõõta tema kaarega.

Tegelikult mõõdame nurka poolringiga (või täisringiga), mille kaar on jagatud kraadideks, seda mõõduriista nimetame malliks. Mida suurema raadiusega mall, seda suurem on ühekraadilise nurga kaar ja seda täpsemalt saame nurka mõõta.

Olgu siinkohal juba öeldud, et ühekraadilise nurga kaar on  $\frac{1}{57}$  ringi raadiusest (teatud täpsusega). Näiteks, kui ringi raadius on ainult 1 cm. siis on ühekraadilise kaare pikkus ainult  $\frac{1}{57}$  cm (0,017 cm), mida on võimata palja silmaga eraldada, sest paremal juhtumisel eraldab inimese silm 0,03 cm. 8-10 cm raadiusega mall on küllaldane nurkade mõõtmiseks meresõidus.



54. joon.

25. Lause: Piirdenurk on poole väiksem samale kaarele toetuvast tsentrinurgast.

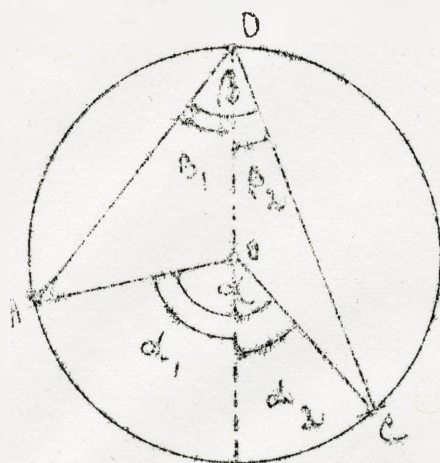
Selle lause tõestust vaatleme eraldi kolmel juhtumil:

1). Piirdenurga üks haar läbib (läheb läbi) ringi keskpunkti (54. joon).

Olgu antud piirdenurk  $\beta$  ja samale kaarele toetuv tsentirnurk  $\alpha$ .  
Tõestada:  $\beta = \frac{1}{2} \alpha$  ? Nurk  $\alpha$  on kolmnurga  $BOC$  väliseks nurgaks, seega võrdub see kolmnurga kahe nurga summaga, millede tipud on punktides  $O$  ja  $P$  (8. lause järeldus).  $\triangle BOC$  on võrdhaarne, sest  $OB = OC$ , nagu ringi raadiused, seega nurgad tippudes  $C$  ja  $B$  on võrdsed (9. lause), järelikult

$$2\beta = \alpha$$

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha$$



55. joon.

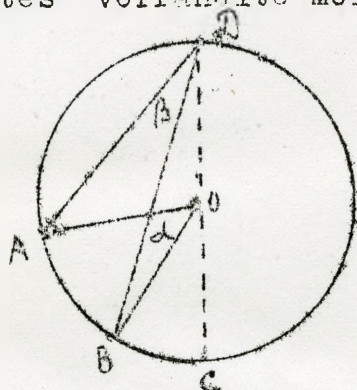
2). Piirdenurga üks haar on ühel ja teine haar teisel pool ringi keskpunkti (55. joon). Tõestuseks tõmbame piirdenurga tipust diameetri, mis jaotab nurga kaheks piirdenurgaks  $\beta_1$  ja  $\beta_2$ . Samuti jaotab see diameeter piirdenurgale vastava tsentrinurga kaheks osaks  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$ . Esimese juhtumi järgi on:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \alpha_1$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \alpha_2$$

Liites võrrandite mõlemad pooled, saame  $\beta_1 + \beta_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha \text{ mida oligi vaja tõestada.}$$



56. joon.

3). Piirdenurga mõlemad haarad asuvad ühel pool ringi keskpunkti (56. joon.)

$$\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC$$

$$\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC \text{ ja } \angle BDC = \frac{1}{2} \angle BOC$$

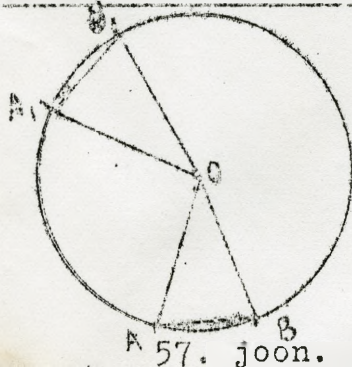
Asetades seadud väärtused, saame

$$\angle ADB = \frac{1}{2} (\angle AOC - \angle BOC)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha$$

Selle lause järeldus on, et piirdenurk, mis toetub poolringi kaarele, on täisnurk, sest tsentrinurk on sel korral sirg nurk ja piirdenurk on poole väiksem, seega täisnurk.

26. lause. Kui ühe ja sama ringi kaared on võrdsed, siis ka nende kaartele toetuvad kõõlud on võrdsed.



57. joon.

Olgu antud ring, mille kaared  $AB$  ja  $A_1B_1$  on võrdsed (57. joon).

Tõestada: kõõl  $AB$  = kõõluga  $A_1B_1$

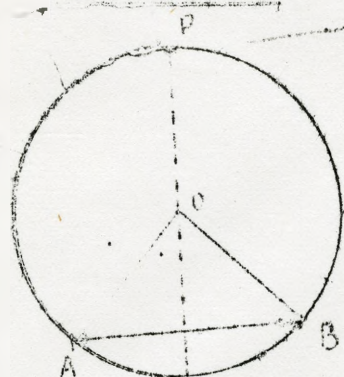
$\triangle AEO = \triangle A_1B_1O$  (I kongruentsuse lause põhjal) sest  $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ , sest eelduse põhjal on nende kaared võrdsed; samuti on nende nurkade küljed võrdsed, nagu ringi raadiused.

Järelikult kolmnurga kül  $AB$  = küljega  $A_1B_1$

Võime tõestada ka vastupidiselt: Kui kõõlud on võrdsed, siis ka nende kõõludele toetuvad kaared on võrdsed ja suuremale kõõlule vastab suurem kaar.

27. lause.

Kõõlu poolitajanormaal on ringi diameetrik.



58. joon.

Olgu antud ring ja tema kõõl AB ning selle kõõlu poolitajanormaal PQ (58. joon). Tõestada, et PQ on ringi diameetrik, s.o. tema läbib ringi keskpunkti.

Ringi keskpunkt O asub poolitajanormaali, sest selle punkti kaugus mõlemast kõõlu otspunktist on ühesugune (2. lause põhjal).

Sellest lausest teeme järeldused:

1) Diameeter, mis tõmmatud kõõlu keskpunkti, on selle kõõluga risti.

2) Ringi keskpunkti kõõlule tõmmatud ristjoon poolitab kõõlu.

3) Kaks ringi lõikumisel ringide keskpunkte ühendav sirge on poolitajanormaal ringide ühisele kõõlule.

Konstruksioon ülesanded:

Mr. 15. Jagada antud ringi kaar pooleks!



59. joon.

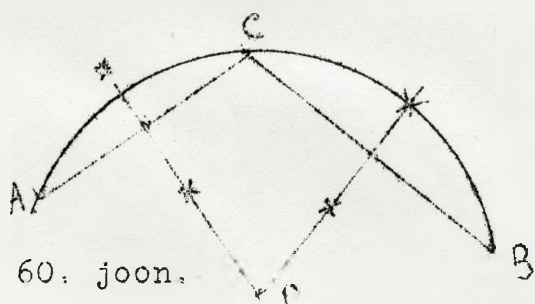
Olgu antud ringjoone osa AB (59. joon) mille jagame kaheks võrdses osaks.

Uhendame kaare otspunktide sirgega AB, mis on selle kaare kõõluks. Konstruime kõõlule poolitajanormaali, mis jagab antud kaare kaheks võrdseks osaks punktis D. Uhendame sirge-

tega punkti D punktidega A ja B, saame võrdsed kõõlud AD ja BD. Järelikult ka kaared AD ja BD on võrdsed, kui võrdsetele kõõludele toetuvad (26. lause).

Mr. 15.

Leida ringi keskpunkt, kui osa ringjoonest on antud!



60. joon.

Olgu antud kaar AB (60. joon), millele leiame ringi keskpunkti. Võtame vabalt ühe punkti C, ja tõmbame kõõlud AC ning BC. Edasi tõmbame mõlemale kõõlule poolitajanormaali, mis on ringi diameetriteks (27. lause). Diameetrite lõikepunkt on ringi keskpunktiks.

13. Puutuja.

Sirgjoonel on igas punktis sama suund. Kõverjoon muudab oma suunda punktist punktini. Et kõverjoone suunda ka kuidagi esile tuua, võtame kõveral (antud juhtumil ring) kaks punkti A ja B. (61. joon) võimalikult üksteise lähedal. Uhendades need punktid sirgega, näitab sirgesuund kõverjoone suunda vahemikus AB, mida lähemale



61. joon.

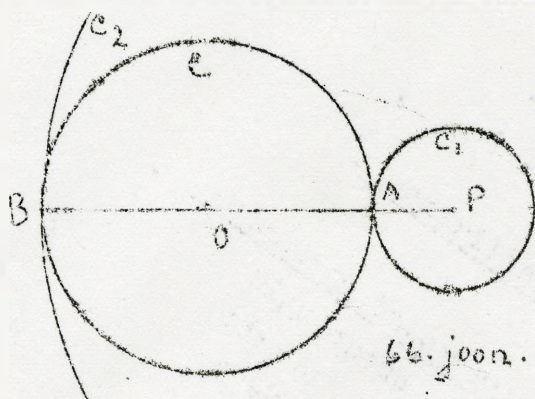
me need punktid võtame, seda lähemale tuleb kõõl AP kaarele AB. Kõõlu keskpunkti tõmmatud raadius on risti kõõluga (27. lause järeldus), seega ka kõverjoon selle punkti ümbruses on risti raadiusega.

Kui punktid A ja B ühtuvad üheks punktiks P, siis kõõl ühtub täpselt kaarega ja muutub selle kaare puutujaks MN selles punktis. Seega ka siis puutuja on risti raadiusega, mis on puutepunkti tõmmatud. Seda omadust me kasutame puutuja konstrueerimisel.



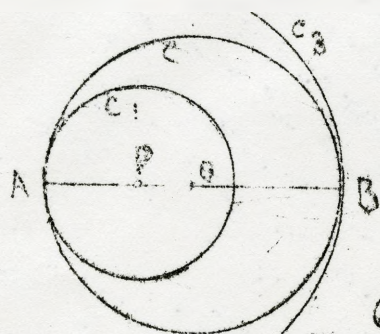
joonestame ringi, mille keskpunktiks on  $O$  ja raadiuseks on  $OB$ .  $AB$  on otsitav kaar mida nurk  $AEN$  oma haaradega hõlmab.

Nr. 20. Antud punkti ümber joonestada ring, mis puutub üht antud ringi.



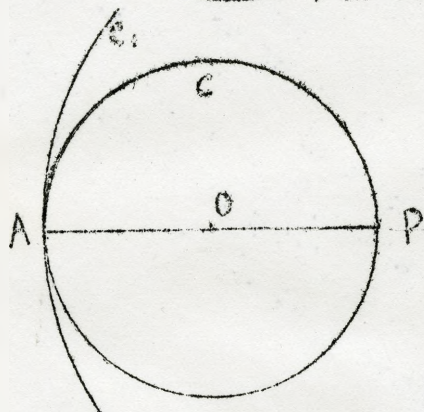
66. joon.

1). Olgu antud ring  $C$  keskpunktiga  $O$  ja punkt  $P$  väljaspool ringi (66. joon). Ühendame punktid  $P$  ja  $O$  sirgega, mis lõikab ringi punktis  $A$ . Eelasi joonestame ringi, mille keskpunktiks on  $P$  ja raadiuseks  $AP$ , saame ringi  $C_1$ , mis puutub antud ringi punktis  $A$ . Joonestades punkti  $P$  ümber ringi raadiusega  $PB$ , saame ringi  $C_2$ , mis samuti puutub antud ringi.



67. joon.

2). Kui antud punkt on antud ringi sees (67. joon.), siis tõmbame ka sirge läbi  $OP$ , mis lõikab ringi punktis  $A$  ja joonestame ringi raadiusega  $AP$ , saame ringi  $C_1$ , mis puutub antud ringi punktis  $A$ ; või joonestame ringi raadiusega  $PB$ , saame ringi  $C_2$  mis puutub antud ringi punktis  $B$ .

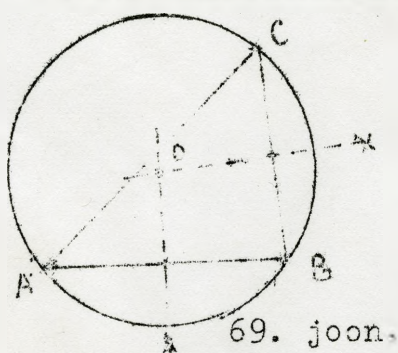


68. joon.

3). Kui antud punkt on antud ringi peal (68. joon.), siis tõmbame jälle sirge  $PO$ , mis lõikab antud ringi punktis  $A$ . Joonestades ringi raadiusega  $PA$  ümber keskpunkti  $P$ , saame ringi  $C_1$ , mis puutub antud ringi punktis  $A$ .

Kahte ringi nimetatakse kontsentrilisteks, kui nad omavad ühise keskpunkti.

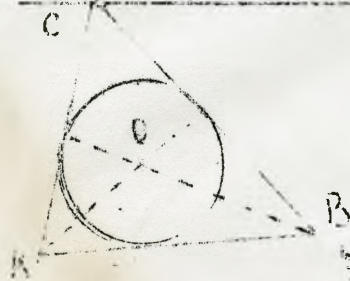
Nr. 21. Joonestada antud kolmnurga ümber ring.



69. joon.

Olgu antud kolmnurk  $ABC$  (69. joon), mille tippude läbi konstruime ringi. Kolmnurga külgi võime vaadata, nagu ringi kõõlusid. Kõõlu poolitajannormaalid on ringi diameetrid. Jaga-me kaks külge pooleks ja tõmbame nende poolitajannormaalid, millede lõikepunkt on otsitava ringi keskpunktiks. Joonestades ringi läbi punktide  $APC$  ongi ülesanne lahendatud.

Nr. 22. Joonestada antud kolmnurga sisse ring.



70. joon.

Olgu antud kolmnurk  $ABC$  (70. joon.) mille sisse joonestame ringi, nõnda et kolmnurga küljed on ringi puutujateks; seega peab otsitava ringi keskpunkt asuma kõikidest külgedest ühel kaugusel. Seda teeme nõnda, et

leiame kolmnurga nurkadele nurga poolitajad, millede lõikepunkt annab ringi keskpunkti.

Ulesanded:

Nr 34. Tõesta, et raadiuse pikkusega kõõlu kaar on  $60^\circ$  !

Nr. 35. Joonestada ringis läbi antud punkti kõige väiksem kõõl!

Nr. 36. Tõesta, et kõik paralleel-kõõlud poolitatakse ühe ja sama diameetriga!

Nr. 37. Kaks ringi lõikavaid üksteist. Läbi ringide lõikepunktide tõmmata puutujad. Tõesta, et puutujate osad ringi sees on võrdsed!

Nr. 38. Tõmmata antud ringile puutuja, nõnda, et see on

a) paralleelne ühe antud sirgega.

b) risti " " "

Nr. 39. Tõmmata läbi ringil asuva punkti puutuja sellele ringile, kui ringi keskpunkt pole teada!

Nr. 40. Antud on ring ja kolmnurk. Konstruuda antud ringi sisse kolmnurk, mille nurgad on võrdsed antud kolmnurga nurkadega!

Nr. 41. Konstruuda antud ringi sektori sisse ring!

Nr. 42. Konstruuda ring, mille raadius on antud ja mis puutub üht sirget antud punktis!.

Nr. 43. Mida kujutab ringide keskpunktides geomeetriline koht, kui kõik ringid läbivad antud kaks punkti?

Nr. 44. Konstruuda antud raadiusega ring, mis puutub kahte antud ringi väljespoolt!

Nr. 45. Leiada punkt, millest kaks antud ringi näivad ühe suurusena!

V. Kujundite sarnasus.

14. Sarnasuse põhiomadused.

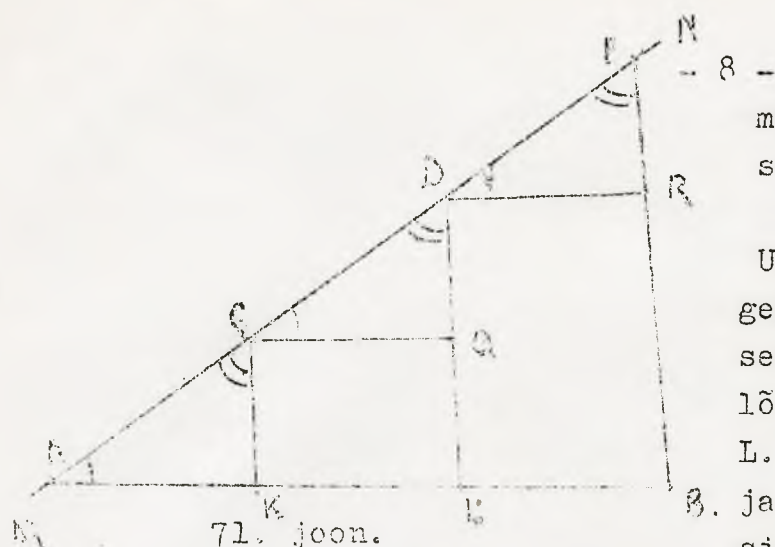
Kujundite kongruentsuse puhul on nõutav, et kõik vastavad elemendid oleksid võrdsed. Kujundite sarnasuse puhul on nõutav, et vastavate joonte vahel olevad nurgad oleksid võrdsed ja vastavad joonte pikkused võrdelised.

Praktilises elus on sarnasuse-õpetusel küllalt suur tähtsus. Näiteks kõik plaanid ja kaardid on koostatud sarnasuse põhimõttel. Korteripõranda plaan on mitu korda väiksem põranda suuruselt, kuid ta peab olema sarnane, s.e. nurgad peavad olema võrdsed ja kui toa pikkus on plaanil kümme korda väiksem, siis ka laius peab kümme korda väiksem olema. Samuti maa- ja merekaardid, mis kujutavad mõnda maa või mere osa, on mitu korda väiksemad tõelikkusest, kuid nurgad kaardil ja maastikul peavad olema võrdsed ja vastavad joonlõigud võrdelised. Et joonte võrdelisusest paremini aru saada, lahendame järgmise näite:

Näide: Jagada antud sirglõik kolmeks võrdseks osaks.

Eelpool me oleme käsitlenud sirglõigu jagamist kaheks võrdseks osaks. Kui oleme jaganud kaheks ja siis pooled veel kaheks, saame neljandikud. Kui oleme korda veel neljandikud poolitame, saame kaheksandikud jne. Selles näites tahame käsitleda sirglõigu jagamist kolmeks.

Olgu antud sirglõik AB (71. joon). mis on vaja jagada kolmeks võrdseks osaks. Selleks joonestame sirglõigu ühest otspunktist mingi sirge MN ja



71. joon.

möödame sellel sirkliga kolm võrdset lõiku:

$$AC = CD = DE$$

Uhendame esiteks punktid B ja E sirgega ja siis tõmbame sellel paralleelsed sirged punktides C ja D, mis lõikavad antud sirget punktides K ja L. Eeasi tõmbame veel punktides C ja D sirged, mis on paralleelsed sirgega AB, saame kolm kongruentset

kolmnurka:  $\triangle ACK \cong \triangle CDQ \cong \triangle DER$  (II kongruentsuse-lause põhjal) sest alused AC, CD ja DE on võrdsed konstruktsiooni põhjal ja nurgad nende aluste juures on võrdsed kui paralleel-haaradega nurgad.

Järelikult  $AK = CQ = DR$ , kuid  $CQ = KL$  ja  $DR = LE$ , nagu paralleelogrammi vastasküljed. Asendades viimases väärtused, saame

$$AK = KL = LE, \text{ seega on ülesanne lahendatud.}$$

Nendest kongruentsetest kolmnurkadest võime kirjutada järgmise proportsiooni:

$$\frac{AK}{KL} = \frac{AC}{CD} = \frac{KC}{QD}, \text{ kuid } KC = LQ \text{ nagu paral. vastasküljed.}$$

Aritmeetikakursuses (nr. 24) käsitasime proportsiooni mõnda omadust, kuid üks omadus on järgmine: Esimese suhte liikmete summa suhtub esimesesse liikmesse, nagu teise suhte liikmete summa suhtub oma esimesee liikmesse. Seega saame eelmisest proportsioonist kirjutada järgmise uue proportsiooni:

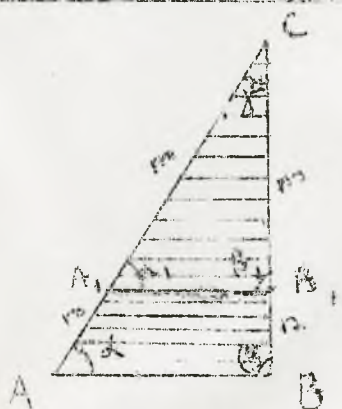
$$\frac{AK + KL}{AK} = \frac{AC + CD}{AC} = \frac{LQ + QD}{KC}$$

mis näitab, et kolmnurkade AKC ja ALD vastavad küljed on võrdelised. Seda sama saame ka ütelda ALD ja ABE külgede kohta.

Eelpool-näidatud viisil võime jaagada sirglõigu mitte ainult kolmeks, vaid ka viieks, kuueks, seitsmeks või ükskõik missugusteks võrdseteks osadeks.

## 29. Lause: (Sarnasuse põhilause)

Kolmnurga sees tõmmatud sirge, mis on paralleelne ühe küljega, lõikab kolmnurgast ära ühe uue kolmnurga, mis on sarnane endisega.



72. joon

Olgu antud  $\triangle ABC$  (72. joon), milles on tõmmatud sirge  $A_1B_1$ , nõnda, et  $A_1B_1 \parallel AB$

Tõestada:  $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$  !

Et kolmnurgad oleksid sarnased, selleks peavad sarnasuse definitsiooni põhjal nende nurgad olema võrdsed ja küljed võrdelised.

$\alpha = \alpha_1$  nagu vastavad nurgad paralleelse. joon. juures

$\beta = \beta_1$  " " " " " "

$\gamma$  on ühine, seega nurgad on võrdsed.

Belmises näites oli üks kolmnurgakülge jagatud võrdseteks osadeks, mille jagatus punktidest tõmmatud paralleeljooned jagasid ka teise külje võrdseteks osadeks. Praegusel juhtumil külge AC on jagatud mittevõrdseteks osadeks, ütleme, et sirglõigust  $A_1C$  on  $m$  ühikut ja  $A_1A$ -s  $n$  ühikut, .i. nende suhe on  $\frac{m}{n}$ . Tõmmates iga ühiku lõpppunktist paralleeljoone AB-ga, jagavad need külje BC samuti  $m$  ja  $n$  osadeks, mille hulgad on  $m$  ja  $n$ . Nõnda saame

$$\frac{A_1C}{A_1A} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{B_1C}{BB_1} = \frac{m}{n}$$

Järelikult

$$\frac{A_1C}{A_1A} = \frac{B_1C}{BB_1}$$

Teelpool-nimetatud proportsiooni-omaduse põhjal saame

$$\frac{A_1C + A_1A}{A_1C} = \frac{B_1C + BB_1}{B_1C} \quad \text{või} \quad \frac{AC}{A_1C} = \frac{BC}{B_1C}$$

Seega oleme näidanud, et kolmnurga kaks külge on võrdelised. Kolmanda külje AB ja  $A_1B_1$  võrdelisust saame tuletada sel teel, et tõmbame punktist  $B_1$  sirge, mis on paralleelne küljega AC. Nõnda võime tõestada, et meie lauses käsitletud kolmnurkade vastavad küljed on võrdelised. Vastavateks külgedeks nimetame külgi, mis asuvad võrsete nurkade vastas.

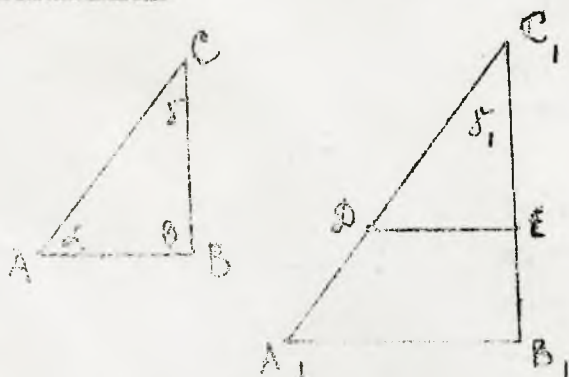
$$\frac{AC}{A_1C} = \frac{BC}{B_1C} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

Võime tõestada ka vastupidiselt, s.o. kui sirge lõikab kolmnurga kaks külge võrdelisteks osadeks, siis see sirge on paralleelne kolmanda küljega.

### 15. Kolmnurkade sarnasus.

#### 30. Lause. ( I sarnasuse lause).

Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe vastava küljega ja nurgad võrdeliste külgede vahel on võrdsed.



73. joon.

Olgu antud kolmnurgad ABC ja  $A_1B_1C_1$  (73. joon.)

$$\text{Eeldus: } \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} \quad \text{ja} \quad \gamma_1 = \gamma$$

Tõestuseks asetame väiksema kolmnurga võrdelised küljed suurema kolmnurga vastavatele külgedele, külge AC külje  $A_1C_1$  peale ja külge BC külje  $B_1C_1$  peale, saame punktid D ja E.

$$\text{Eelduse ja konstruktsiooni põhjal on: } \frac{A_1C_1}{DC_1} = \frac{B_1C_1}{EC_1} \quad \text{siis peab } DE \parallel A_1B_1$$

seega  $\triangle DEC_1 \sim \triangle A_1B_1C_1$  (sarnasuse põhilause), . Kuid  $\triangle DEC_1 \sim \triangle ABC$ , seega  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , mida oligi vaja tõestada.

#### 31. Lause. ( II sarnasuse lause)

Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga.

Olgu antud  $\triangle ABC$  ja  $\triangle A_1B_1C_1$  milles  $\alpha = \alpha_1$  ja  $\beta = \beta_1$  (73. joon)

Kui kaks nurka ühes kolmnurgas on võrdsed kahe nurgaga teises kolmnurgas, siis ka kolmas nurk nendel kolmnurkade l on võrdne, sest kolme nurga summa on  $180^\circ$ ; kui lahutame kahe võrdse nurga summa  $180^\circ$ -dist, siis jääb mõlema kolmnurga puhul on võrdne.

Tõestuseks asetame väiksema kolmnurga külje AC külje  $A_1C_1$  peale, saame punkti D, millest tõmbame paralleeljoone külje  $A_1B_1$ -ga

$\triangle DEC_1 \cong \triangle ABC$  (II kongruentsuse-lause põhjal), sest  $AB = DC_1$  konstruktsiooni põhjal ja nurk  $\gamma = \gamma_1$ , samuti  $\angle C_1DE = \angle_1 = \angle$   
 $\triangle DEC_1 \cong \triangle A_1B_1C_1$ , järelikult ka  
 $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$  mida oligi vaja tõestada.

### 32. Lause. (III sarnasuse lause)

Kaks kolmnurks on sarnased, kui ühe kolmnurga kolm külge on võrdelised teise kolmnurga kolme küljega.

Olgu antud kaks kolmnurka  $\triangle ABC$  ja  $\triangle A_1B_1C_1$  (73. joon), milles

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$$

Tõestuseks asetame külje  $A_1C_1$  peale ~~xxxxxxx~~ ja külje BC külje  $B_1C_1$  peale, saame punktid D ja E

$$\frac{A_1C_1}{DC_1} = \frac{B_1C_1}{EC_1} \quad \text{eelduse ja konstruktsiooni põhjal}$$

Järelikult  $DE \parallel A_1C_1$  (29. lause järeldus) ja

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$$

Nende kolme sarnasuse lause tuletusest nähtub, et need on ~~an~~ analoogilised (sama laadi) kongruentsuse-lausetega, ainult kongruentsuse puhul pidid teatud küljed võrdsed olema, sarnasuse puhul aga võrdelised.

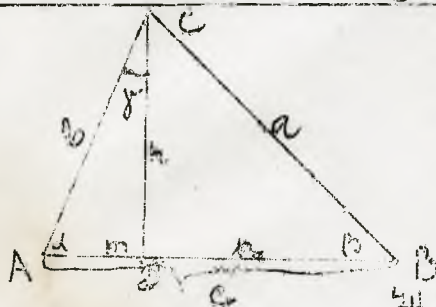
Ka neljas sarnasuse lause on täiesti analoogiline kongruentsuse neljanda lausega, seda me aga siin kohal ei käsitle, sest selle lause kasutamine esineb harva.

### 33. Lause.

Täisnurkses kolmnurgas hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on:

- 1) keskmine võrdeline hüpotenuusi osadega.
- 2) iga kaatet on keskmine võrdeline hüpotenuusi ja hüpotenuusile tõmmatud kaateti projektsiooniga.
- 3) kõrgus on neljas võrdeline hüpotenuusi ja kaatetitele.

Võrdses (proportsioonis) esinevad neli liiget a, b, c ja d. Kui kaks sisemist (keskmist) on võrdsed, siis nimetatakse seda võrdset keskmist liiget keskmiseks võrdeliseks. Keskmist võrdelist nimetatakse ka geomeetriliseks keskmiseks. Näiteks kahe suuruse a ja b aritmeetiline keskmine on nende summa jagatud kahega, s.o.  $\frac{a+b}{2}$ . Nende samade suuruste geomeetriline keskmine on aga ruutjuur nende korrutisest, s.o.  $\sqrt{a \cdot b}$



1) Olgu antud täisnurkne kolmnurk ABC (74. joon), milles täisnurga tipust C on tõmmatud kõrgus h hüpotenuusile AB. Kõrgus jagab hüpotenuusi kaheks osaks m ja n.

Tõestada, et  $m : h = h : n$  !

$\triangle ADC \sim \triangle BDC$  (II sarnasuse lause põhjal), sest  $\angle + \gamma_1 = 90^\circ$   
 $\angle + \beta = 90^\circ$

järelikult  $\gamma_1 = \beta$

$\triangle ADC \sim \triangle BDC$ , kui täisnurk.

Kolmnurkade sarnasusest järeldub, et vastavad küljed on võrdelised, saame  
 $m : h = h : n$ , mida oligi vaja tõestada.

Proportsiooni-omaduse põhjal võime kirjutada

$$m \cdot n = h^2; \quad h = \sqrt{m \cdot n} \quad (\text{geomeetriline keskmine})$$

2). Sõna projektsioon tähendab ülekandmine (projekteerida - üle kanda). Näiteks, kui asetame pliiatsi lambi valgusesse nõnda, et seinal tekib pliiatsi vari, seega valgusekiired projekteerivad pliiatsi seinal. Meie võime kujutada ka, et valgusekiired projekteerivad kaateti b hüpotenuusile (antud juhtumil on projektijad kiired risti hüpotenuusiga), saame tema projektsiooni m.

Tõestada, et  $c : b = b : m$ !

Seda saame tõestada samuti sarnasuse põhjal, sest

$\triangle ADC \sim \triangle ABC$ , millest saame kirjutada vastavate külgede võrdelisuse  $c : b = b : m$

Samuti saame tõestada, et  $\triangle CDE \sim \triangle ABC$ , millest võime kirjutada  $c : a = a : n$

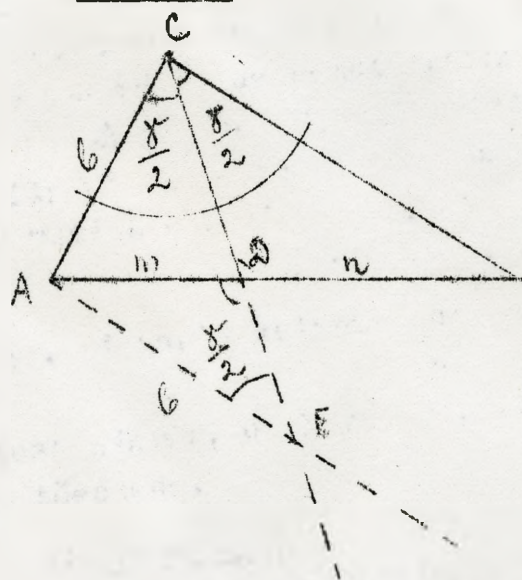
3). Viimaste kolmnurkade sarnasusest saame ka, et

$$c : a = b : h,$$

millest nähtub, et h on proportsiooni neljandaks liikmeks, mida oligi vaja tõestada.

#### 34. lause. nurga

Kolmnurga poolitaja jagab vastaskülje võrdeliselt kahe teise küljega.



Olgu antud kolmnurk ABC ja nurga tipust C tõmmatud nurga poolitaja CD (75. joon).

$$\text{Tõestada: } \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{CB} \quad !$$

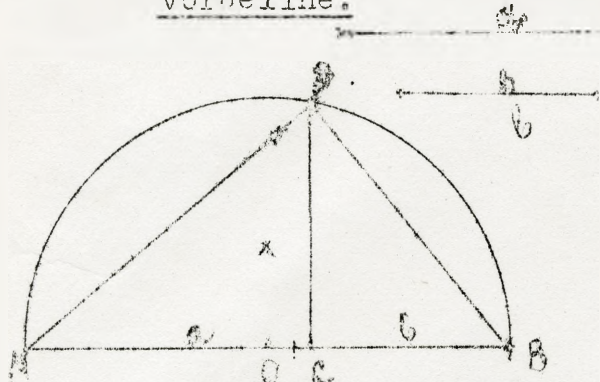
Tõestuseks tõmbame punktist A paralleeljoone külje CB-ga, mis annab nurgapoolitaja pikendusega punkti E.  $\triangle CDE \sim \triangle ADE$  (II sarnasuse lause), sest nurgad tipus D on võrdsed, kui tippnurgad, ja nurk tipus E on võrdne  $\frac{x}{2}$  nagu sisemised põiknurgad. Küljed AE ja AC on võrdsed, sest võrdsete nurkade vastas on ka võrdsed küljed. Järelikult

$$m : n = a : b, \text{ mida oligi vaja tõestada.}$$

75. joon.

Konstruksioon ülesanded.

Nr. 23. Konstruuda kahe antud sirglõigule kolmas, mis on nende keskmine võrdeline.



76. joon.

Olgu antud sirglõigud  $a$  ja  $b$ , leiame kolmanda sirglõigu  $x$ , mis on keskmiseks võrdeliseks (76. joon). Võtame vabalt ühe sirge, millele asetame sirglõigud  $a$  ja  $b$ , saame otspunktid  $A$ ,  $C$  ja  $B$ . Jagame sirglõigu  $AB$  pooleks, saame punkti  $O$ , millest joonestame ringi raadiusega  $AO$ . Edasi püstitame punktist  $C$  ristjoone  $AB$ -ga, saame punkti  $D$ . Ühendades punkti  $D$  punktitega  $A$  ja  $B$  sirgetega, saame täisnurga tipus  $D$ , nagu piirdenurk, mis

toetub oma haaradega diameetrile. Seega  $DC$  on otsitud keskmine võrdeline  $x$  sirglõikudele  $a$  ja  $b$  (33. lause põhjal).

Ulesanded:

- Nr. 46. Leida joonise abil (graafiliselt) proportsiooni neljas liige, kui kolm liiget on 9,6 cm, 3,6 cm ja 2,4 cm!
- Nr. 47. Leida keskmine võrdeline sirglõikudele 6,75 cm ja 0,75 cm!
- Nr. 48. Kiriku torni varju pikkus on 42,4 m ja samal ajal on 2 m pikkuse kepi varju pikkus 2,12 m. Leida torni kõrgus!
- Nr. 49. Täisnurkse kolmnurga kõrgus mis on tõmmatud hüpotenuusile, on 4 cm ja hüpotenuusi väiksem osa selle tõmmatud kõrguse puhul on 2 cm. Leida kolmnurga küljed!
- Nr. 50. Täisnurkse kolmnurga sisse, mille küljed on 3,4 ja 5 cm konstruuda ruut, nõnda et ruudu nurga kaks tippu on hüpotenuusil ja üks tipp kummagi kaatetil!

K o n t r o l l t ö ö nr. 3

1. Tõesta, et ringi kaare osad kahe paralleelse kõõlu vahel on võrdsed!
2. Kaks kontsentrilist ringi lõigatakse sama kõõluga. Tõesta, et kõõlu osad välise ja sisemise ringjoone vahel mõlemal pool on võrdsed!
3. Konstruuda antud ringi ümber kolmnurk, mille nurgad võrduvad ühe antud kolmnurga nurkadega.
4. Joonestada antud raadiusega ring, mis puutub teist antud ringi antud punktis.
5. Joonestada antud raadiusega ring, mis puutub kahte lõikuvat sirget!
6. Tõesta, et kolmnurga kõrgused on pöördvõrdelised nende külgedega, millele need kõrgused on tõmmatud.
7. Kolmnurga  $AFC$  küljed  $AF = 8$  cm ja  $AC = 10$  cm. Külje  $AB$  peale asetame sirglõigu  $AD$  ja tõmbame punktist  $D$  sirge, mis on paralleelne  $FC$ -ga ning lõikab külge  $AC$  punktis  $E$ . Arvutada  $AD$ , kui  $AD = CE$ !
8. Täisnurkses kolmnurgas on hüpotenuusile tõmmatud kõrgus 9,6 cm ja väiksem kaatet 12 cm. Leida kolmnurga küljed!
9. Kolmnurga küljed on 20 cm, 21 cm ja 29 cm. Tõmba väikseima nurgale nurgapoolitaja ja arvuta külje osad, mida see nurgapoolitaja jagab!
10. Konstruuda ringi sektorisse ruut nõnda, et ruudu kaks nurka on ringi kaarel ja üks nurk kummagi raadiusel!