

G E O M E E T R I A.

Merekooli eelklassi kursus.

Koostanud Dr. E.Kägi.

VI. K U J U N D I T E P I N D A L A.

16. Nelinurga pindala.

Sirglõigu pikkust me mõõdame ühe teise sirglõiguga, mille me oleme valinud pikkuseühikuks. Mõõtarv (mõõtmisest saadud arv), mis näitab, mitu korda pikkuseühik mahub sirglõiku, nim. sirglõigu pikkuseks.

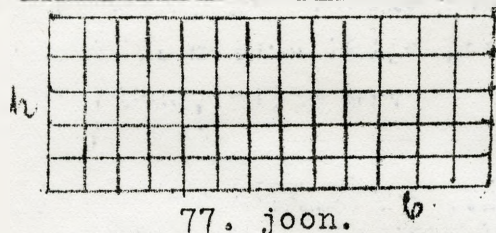
Näiteks, kui sirglõigu pikkus on 8,6 cm, siis pikkuseühik 1 cm mahub 1 sirglõiku 8,6 korda. Valime pikkuseühikuks 1 mm, siis on sama sirglõigu mõõtarvuks 86, mis näitab, et pikkuseühik 1 mm mahub sirglõiku 86 korda.

Pinnaühikuks on ruut, mille küljeks on pikkuseühik. Mõõtarv, mis näitab, mitu korda pinnaühik mahub antud pindalasse, nimetame selle pinna suuruseks.

1). Kõige lihtsam on arvutada ristküliku pindala. (pindala asemel kasutame ka lühidalt pind). Mõõdame ühe külje (77. joon.), mille võtame aluseks - b (baas) ja alusele ristkülje, mille võtame kõrguseks - h ning tõmbame läbi mõlema külje jaotuspunktide paralleeljooned külgedele; saame ruutühikud, mille arv

$$S = b \cdot h$$

Ristküliku pind võrdub aluse ja kõrguse korrutisega.



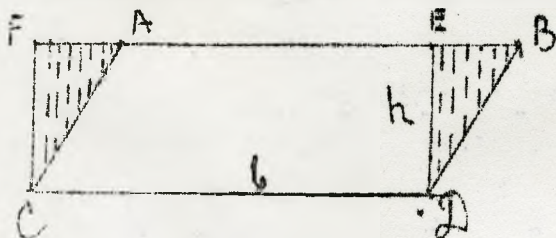
77. joon.

Ristküliku erijuhtumiks on ruut, s.o. ristkülik, mille alus ja kõrgus on võrdsed, seega ruudu pind

$$S = a \cdot a = a^2$$

Ruudu pind võrdub külje ruuduga.

Paralleelogrammi pindala saame arvutada ristküliku abil, sest iga paralleelogrammi saame muuta ristkülikuks, mille alus ja kõrgus on võrdsed paralleelogrammi aluse ja kõrgusega.



78. joon.

Olgu antud paralleelogramm ABCD (78. joon.), mille alusele CD konstruime ristküliku CDEF.

$\triangle EBD \cong \triangle FCA$ (I kongruentsuse-lause) sest $ED = FC$, kui paralleeljoonte kaugus

$AC = BD$, kui paralleelogrammi vastas küljed

$\angle FCA = \angle EDB$, kui parallel-haardega nurgad.

Sellest nähtub, et me võime paralleelogrammi ühelt poolelt ära lõigata kolmnurga EBD ja liita selle teisele poolele kolmnurgana FAC, seega võimalus paralleelogrammi muuta ristkülikuks. Ristküliku pind aga võrdub aluse ja kõrguse korrutisega, seega paralleelogrammi pind

$$S = b \cdot h$$

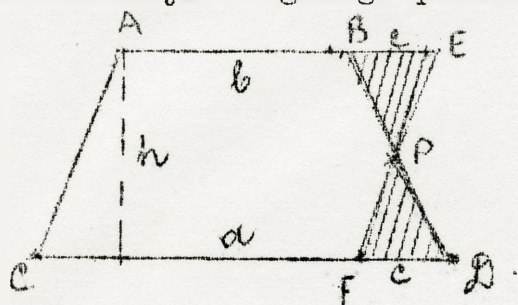
Parallelogrammi pind võrdub aluse ja kõrguse korrutisega. Paralleelogrammi kõrguseks nimetame ristsirget küljele, mille me võtsime aluseks.

Romb on paralleelogrammi erijuhtum, seega ka selle pind võrdub aluse ja kõrguse korrutisega.

Elpooletuletatud lausest teame, et rombi diagonaalid on risti, seega võime rombist konstruuda ristküliku, mille aluseks on üks diagonaal, kõrguseks pool teisest diagonaalist. Nõnda võime rombi pinda arvutada ka diagonaalide abil.

Rombi pind võrdub diagonaalide poole korrutisega.

3) Trapetsi pinda saame sel teel arvutada, et konstruime tema asemel sama aluse ja kõrgusega paralleelogrammi.



79. joon.

Olgu antud trapets AECD (79 joon.), mille paralleel-küljed on a ja b. Jagame külje BD pooleks, saame punkti P. Tõmmates läbi punkti P paralleeljoone AC-ga, muudame antud trapetsi AECD paralleelogrammiks AECF, sest $\triangle BEP \cong \triangle FDP$ (II kongruentsuse laus. põhj.) sest $BP = DP$ konstruktsiooni põhjal

$\angle BPE = \angle FPD$, kui tippnurgad

$\angle PFE = \angle PDF$, kui i sisemised põiknurg.

Paralleelogrammi aluseks on $\frac{(a - c) + (b + c)}{2} = \frac{a + b}{2}$ mis on antud trapetsi paralleel-külgede aritmeetiline keskmine.

Trapetsi puhul nim. mõlemat paralleel-külge aluseks, mida võime ka paralleelogrammi puhul kasutada. Seega trapetsi pind

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Trapetsi pind võrdub aluste poolsumma ja kõrguse korrutisega.

Ulesanded:

Nr. 51. Turuplatsi, mille pikkus on 63 m ja laius 45 m, tahetakse katta neljakandiliste kividega. Palju kive läheb selle platsi katmiseks, kui kivi pikkus on 18 cm ja laius 14 cm? (Vastus: 112500 kivi).

Nr. 52. Ruudukujulise viinamarjapõllu külje pikkus on 12 m. Palju pöösaid võib istutada, kui iga rea vahe on 2 m ja iga pöösa vahe reas 1,5 m? (Vastus: 48 pöösast)

Nr. 53. Katuseharja pikkus on 18 m ja laius harjast räästani 5,5 m. Mis on odavam ja kui palju, kas kivikatus või tsinkplekk-katus, kui 1 ruutmeetri katmiseks läheb 12 kivi ja tuhat kivi maksab 120 kr. ning tsinkplekk-tahvli hind mõõututega 1,2 . 0,5 m maksab 1,20 kr. (Vastus: 110,88 kivi odavam)

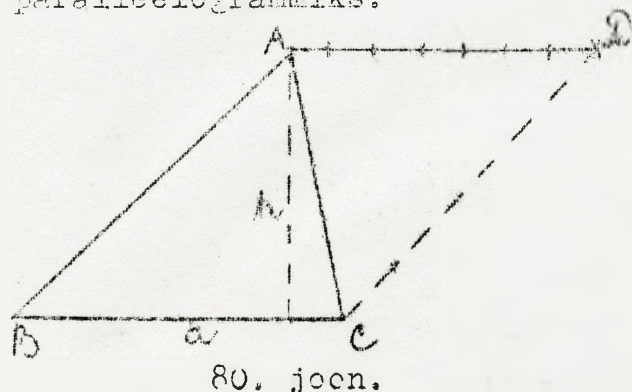
Nr. 54. Ristküliku-kujulise näituseplatsile, mille pikkus 250 m ja laius 125 m, tahetakse teha 1,5 m kõrgune plankae. 2 a) Palju laudu läheb selleks, kui laua pikkus on 3m, laius 20cm? b) Palju maksab selle ala värvimine (mõlemalt poost), kui ühe ruutmeetri värvimine maksab 1,5kr? (Vastus: 1875 tk, 3375 kr)

Nr. 55. Põld on trapetsi-kujuline, mille paralleel-küljed on 210 m ja 167 m ning kõrgus (paralleel-külgede kaugus) on 64 m. Palju tulu annab see põld, kui kaer andis hektarilt 2850 kg teri ja 3400 kg õlgi, ning 1 tonn teri maksab 140 kr; 1 tonn õlgi 30 kr? (Vastus: 604,40 kr)

Nr. 56. Tõmmata paralleelogrammi ühe nurga tipust kaks sirget, mis jagavad paralleelogrammi pinna kolmeks võrdseks osaks!

17. Kolmnurga pindala.

Kolmnurga pindala saame arvutada sel teel, et muudame kolmnurga paralleelogrammiks.



80. joon.

Olgu antud kolmnurk ABC (80 joon.), mille juurde konstruime temale kongruentse kolmnurga ACD, joonestades sirkliga punktist C kaare raadiusega AB ja punktist A kaare raadiusega BC. Antud kolmnurk ja konstrueeritud uus kolmnurk on kongruentsed (III kong. lause põhjal). Seega kolmnurga pind

$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

Kolmnurga pind võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega.

Täisnurkse kolmnurga puhul võime võtta ühe kaateti aluseks ja teise kõrguseks, seega

Täisnurkse kolmnurga pind võrdub kaatetite poole korrutisega.

Nr. 57. Kolmnurga-kujulise põllu üks külge on 176 m ja sellele küljele tõmmatud kõrgus 112 m ning see põld annab 7392 kg heina. Palju teeb see iga hektari kohta? (Vastus: 7500 kg).

Nr. 58. Leida täisnurkse võrdhaarse kolmnurga pind, kui üks võrdsetest haaradest on 520 m! (Vastus: 13,52ha.)

Nr. 59. Palju maksab kolmnurk-puri, mille üks külge on 8,8m ja sellele küljele tõmmatud kõrgus on 7,2 m, kui purjeriie on 60 cm lai ja maksab 4,50 kr. meeter? (Vastus: 237,6 kr.)

Nr. 60. Tõmmata läbi antud kolmnurga tipu sirged, mis lõikavad kolmnurga pinna neljaks võrdseks osaks!

Nr. 61. Konstruuda kolmnurk, millel on antud kolmnurgaga sama alus ja sama suur pind ning nurk ülal tipus võrdub mingi antud nurgaga!

Nr. 62. Tõestada, et kui ühendada sirgetega kolmnurga külgede keskpunktid, siis tekib neli kongruentset kolmnurka!

18. Ringi pindala.

Ringi võime jaotada üksikuteks sektoriteks AOE, EOC, COD jne. (81. joon)



81. joon.

Sektori pindala on oma kujalt lähedane kolmnurga pindalaga. Näiteks, kui käsitleme sektorit AOE, siis näeme, et selle pind erineb kolmnurga AEO pinnast selle võrra, mille võrra

kõõl AB erineb kaarest AB. Ringi puutuja puhul näitasime, et kui kõõl muutub lühemaks ja lühemaks, siis ta lõpuks ühineb ringi kaarega. Sedasama võime me ka ringi sektori puhul ütelda. Mida lühema kõõlu AB võtame, seda rohkem läheneb kolmnurga ABO pind sektori AOB pinnale. Kui tähistame kolmnurga alused järgmiselt AB tähega a, BC tähega b, CD tähega c jne, siis saame pinnad

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{a \cdot h}{2} \\ S_2 &= \frac{b \cdot h}{2} \\ S_3 &= \frac{c \cdot h}{2} \quad \text{jne.} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\text{Ringi pind } S = (a+b+c+\dots) \cdot \frac{h}{2}$$

Kui kolmnurga alused a, b, c lähenevad ringi kaarele, siis kolmnurga kõrgused muutuvad raadiusteks. Nõnda võime viimase valemi asemel ütelda: Ringi pind võrdub ringi ümbermõõdu ja poole raadiuse korrutisega.

Sellest nähtub, et ringi pinna arvutamisel peame enne teadma ringi ümbermõõdu.

Ringi ümbermõõtu arvutame ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurga ümbermõõdu abil. Hulknurga küljed lähevad ringi kaarele seda rohkem, mida rohkem on hulknurgal külgi. Konstruksioon-ülesandes nr. 13 näitasime, et kõige kergem on konstruuda sissejoonestatud korrapärest kuusnurka, sest selle külg võrdub raadiusega.

Kui me võtame ringi ümbermõõdu asemel korrapärase kuusnurga ümbermõõdu, siis on ringi ümbermõõt 6 raadiust või 3 diameetrit, s.o. ringi ümbermõõt on kolm korda suurem oma läbimõõdust. Lihtsama arvestuse juures jätkubki juba sellest täpsusest. Näiteks, kui talumees läheb ostma vankri ratta vitsta (latttrauda), siis tema arvutab, et ratta ümbermõõt on kolm korda suurem ratta läbimõõdust.

Täpsema arvutamise jaoks peaksime võtma hulknurga, mille külgede arv on 12, 24, 48 jne. nagu see antud juhtumil just vajalik on.

Üldse tähistatakse ringi ümbermõõdu suhet läbimõõdusse tähega π , seega π näitab, mitu korda ringi ümbermõõt on suurem läbimõõdust.

Babüloomlased võtsid π väärtuseks 3, egiptlased aga juba $3\frac{1}{7}$, mis on juba küllalt hea täpsus. Mitmed vana-aja matemaatikud pühendasid palju aega π arvutamiseks, sest nemad arvasid selle arvu sellisena, mida võib kirjutada täisarvu ja murruna. Üks nendest arvutas π saja kümnend-kohaga ja kulutas selle arvutamiseks 37 aastat, sest sel ajal ei olnud mingeid arvutuse-abivahendeid.

Praktilises arvutamises nii suurt täpsust kunagi vaja ei lähe, harilikult võtame π väärtuseks 3,14 või vahel ka 3,1416; suuremat täpsust läheb tarvis (3,14159265) väga harva.

Nõnda siis ringi ümbermõõt (C - ringi ümbermõõdu sümbol)

$$C = \pi \cdot 2r = 2\pi r$$

ja ringi pind

$$S = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$$

1. näide. Leida ringi pind ja ümbermõõt, kui raadius on 6 dm!

$$C = 2\pi \cdot 6 = 6,28 \cdot 6 = 37,68 \text{ dm}$$

$$S = \pi r^2 = 3,14 \cdot 6^2 = 3,14 \cdot 36 = 113,04 \text{ dm}^2.$$

2. näide. Umariku kaevu ümbermõõt on 8,792 m. Leida pind!

Pinna leidmiseks peame enne arvutama raadiuse.

$$C = 2\pi r; \quad r = \frac{C}{2\pi} = \frac{8,792 \text{ m}}{6,28} = 1,4 \text{ m}$$

$$S = \pi r^2 = 3,14 \cdot 1,4^2 = 3,14 \cdot 1,96 = 6,1544 \text{ m}^2$$

3. näide. Leida ringi sektori pind, kui sektori nurk on 54° ja ringi raadius 5 cm!

Sektori pind = Sektori kaar korrutatud poole raadiusega.

Sektori kaare saame, kui ringi ümbermõõdu jagame 360-ga ja korrutame 54-ga.

$$S = \frac{2\pi r \cdot 54}{360} \cdot \frac{r}{2} = \frac{3,14 \cdot 5^2 \cdot 3}{20} = 11,775 \text{ cm}^2$$

4. näide. Leida ringi segmendi pind, kui ta kaar on 108° ja ringi raadius on 28 mm; segmendi juurde kuuluv kõõl on 45 mm ja segmendi kõrgus 16 mm.

Segmendi pindala leiame, kui selle kaarele kuuluva sektori pindalast lahutame kõõlule toetuva kolmnurga pinna.

$$S = 2 \cdot \frac{2\pi \cdot 28 \cdot 108}{360} \cdot \frac{28}{2} - \frac{45 \cdot (28 - 16)}{2} = 468,5 \text{ mm}^2$$

Ulesanded:

Nr. 63. Palju rattavitsa on tarvis vankbiratta rautamiseks, kui ratta läbimõõt on 1,2 m!

Nr. 64. Palju maksab umariku laua värvimine, kui laua läbimõõt on 2,4 m ja ühe ruutmeetrilise pinna värvimine maksab 1,75 kr.! (Vastus: 7,91 kr)

Nr. 65. Ümariku akna alumine osa on ristküliku-kujuline, mille peal asub poolringi-kujuline ülemine osa. Leida akna pind, kui akna laius on 2,4 m ja kogu kõrgus 5,2 m! (Vastus: 11,8608 m²)

Nr. 66. Ratas, mille läbimõõt on 1,4 m, teeb 2 tiiru sekundis. Kui pika tee teeb see ratas 3 minutiga! (Vastus: 1582,6 m)

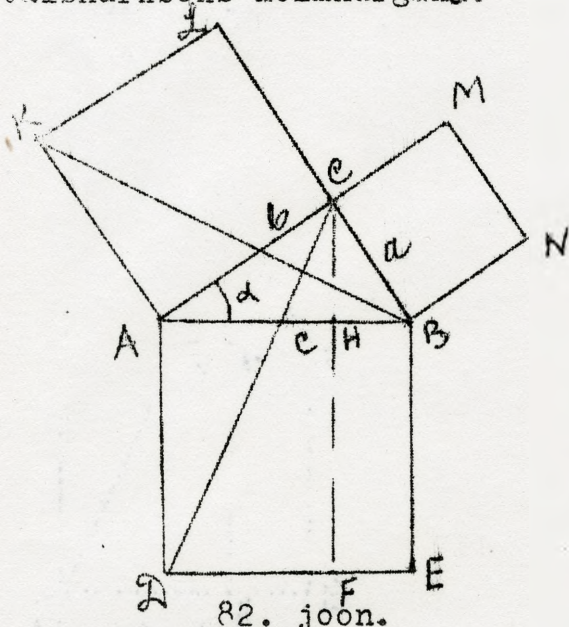
Nr. 67. Arvutada pind kahe kontsentrilise ringi vahel, kui ühe ringi raadius on 6 cm ja teise 8 cm! (Vastus: 87,92 cm²)

VII Mõned tähtsad laused.

19. Pütagorose lause.

Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile konstruitud ruut võrdub kaatetitele konstruitud ruutude summaga.

Seda lauset läheb õieti kõige sagedamini vaja. Olgugi et see lause käsitleb täisnurkset kolmnurka, saame seda kasutada ka kalonurksete kolmnurkade puhul, sest kalonurkseid kolmnurki saame kõrgusega jagada kaheks täisnurkseks kolmnurgaks.



Olgu antud täisnurkne kolmnurk ABC (82. joon.), mille hüpotenuusile konstruitud ruut on AFDE ja kaatetitele konstruitud ruudud ACKL ning BCMN. Tõestada: $c^2 = a^2 + b^2$!

Tõmbame täisnurga tipust C ristjoone CF hüpotenuusile, mis jagab hüpotenuusi kaheks ristkülikuks AHDF ja BHEF. Nüüd me tõestame, et esimene ristküliku pind võrdub kaateti b ruuduga ja teine kaateti a ruuduga.

Tõestuseks tõmbame sirged KB ja CD, saame kaks kongruentset kolmnurka $\triangle ADC \cong \triangle AKB$ (I kongruents.laus.)

sest $AB = AD$ kui ruudu küljed; $\angle DAC = \angle KAB$, sest mõlemad võrduvad $90^\circ + \alpha$
 $AK = AC$ " " "

Kongruentsete kolmnurkade pinnad on võrdsed.

Kolmnurga ADC pind võrdub $\frac{AD \cdot DF}{2}$ (alus . kõrgus)

$$\text{" } \triangle AKB \text{ " } \frac{AK \cdot AC}{2}$$

$$\frac{AD \cdot DF}{2} = \frac{AK \cdot AC}{2}$$

Korrutades võrrandi mõlemaid pooli 2-ga saame

Ristküliku ADHF pind = kaateti b ruuduga

Samal viisil võime tõestada, et ristküliku BHEF pind = kaateti a ruuduga, selkorral ühendame sirgetega punktid C ja AN, saame kongruentsed kolmnurgad EBC ja FNA.

See on vana klassiline tõestus, mida on kasutatud juba paartuhat aastat. Sedasama saame ka algebraliselt tõestada järgmiselt:

Sirge HC on täisnurga tipust tõmmatud hüpotenuusile, siis on 33 lause teise lõike põhjal

$$\begin{aligned} b^2 &= c \cdot \overline{AH} \\ a^2 &= c \cdot \overline{BH} \\ \hline a^2 + b^2 &= c \cdot (\overline{AH} + \overline{BH}) \\ \boxed{a^2 + b^2} &= \boxed{c^2} \end{aligned}$$

Nagu me juba gecmeetria kursuse alguses nägime, tunti seda täisnurkse kolmnurga omadust juba Egiptuses, sest n.n. Egiptuse kolmnurk külgedega 3,4 ja 5 ühikut on kolm järjestikku arvu, mille kahe esimese

ruutude summa võrdub kolmanda ruuuga

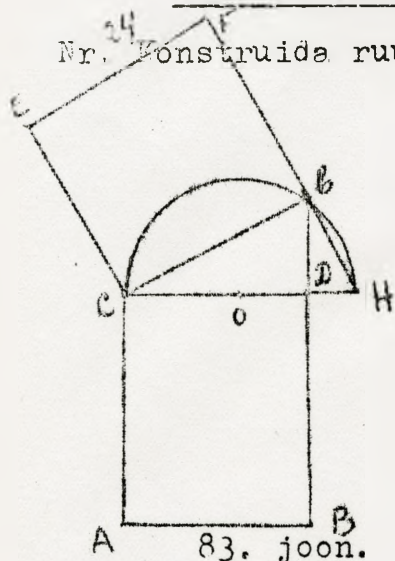
$$3^2 + 4^2 = 5; \quad 9 + 16 = 25$$

See on täisnurkne kolmnurk, mille küljed on väljendatud kõige väiksemate arvudega. Kui me korrutame iga külge 2-ga, siis saame sedasama näidata, sest

$$6^2 + 8^2 = 10^2$$

Samuti võime iga külge korrutada 3-ga, 4-ga jne.

Konstruksioon ülesanded.

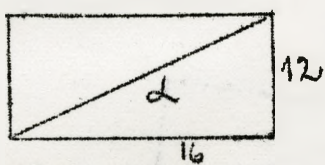


83. joon.

Nr. 83. Konstruuda ruut, mille pind on sama suur, kui antud ristküliku pind!

Olgu antud ristküliku ABCD (83. joon.). Pikendame külge CD nii palju, et $CH = AC$. Edasi jagame sirge CH pooleks, saame punkti O, millest joonestame ringi raadiusega CO. Pikendades PD kuni lõikumiseni ringi kaarega, saame punkti G. Ühendades punkti G punktidega C ja H, saame täisnurga tipus G. Konstruues kaateti CG peale ruudu, on Pütagorase lause põhjal selle ruudu pind võrdne antud ristküliku pinnaga.

1. näide. Ristküliku küljed on 16 cm ja 12 cm. Leida diagonaal?



84. joon.

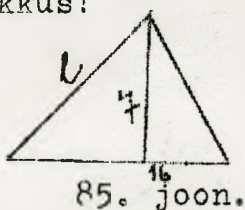
Diagonaal jagab ristküliku kaheks täisnurkseks kolmnurgaks (84. joon.). Pütagorase lause põhjal võime kirjutada:

$$d^2 = 16^2 + 12^2$$

$$d^2 = 256 + 144 = 400$$

$$d = \sqrt{400} = 20$$

2. näide. Katuse kõrgu laest on 7 m, lae laius 16 m, Leida katuse-sarika pikkus!



85. joon.

Katus moodustab laega võrdhaarse kolmnurga (85. joon.). Pütagorase lause põhjal sarika pikkus

$$l^2 = 7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$$

$$l = \sqrt{113} = 10,6 \text{ m}$$

Ülesanded.

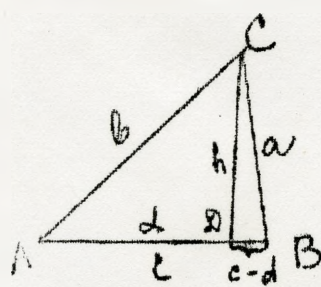
Nr. 68. Võrdhaarse kolmnurga alus on 20 dm ja haar 26 dm. Leida selle kolmnurga pind! (Vastus: 240 dm^2)

Nr. 69. Leida ruudu diagonaal, mille külge on 48 cm! (Vastus: 67,9 cm)

Nr. 70. Arvutada võrdkülgse kolmnurga pind, mille külge on 14 cm! (Vastus: $84, 87 \text{ cm}^2$)

Nr. 71. Ringi kõõlu pikkus on 4 dm ja selle kõõlu kaugus ringi kesk-punktist 1,5 dm. Arvutada ringi raadius! (Vastus: 2,5 dm)

Nr. 72. 18 m pikkune redel on seatud vastu seinu nõnda, et põrandal redeli kaugus seinast on 4 m. Kui kõrgele ulatub redeli ülemine ots? (Vastus: 17,55 m).



86. joon.

20. Heroni valem.

Heroni valem võimaldab kolmnurgapinna arvutamist kolme külje abil.

Olgu antud kolmnurk ABC (86. joon.), mille pinna arvutamiseks peame leidma kõrguse - h.

Kõrgus jagab kolmnurga kaheks täisnurkseks kolmnurgaks. Heroni valemi mõtte seisneb selles, et arvutada külgede abil kolmnurga kõrgus.

Pütagorase lause põhjal

$$\begin{aligned} \text{kolmnurgast EDC saame} \quad a^2 &= h^2 + (c-d)^2 = h^2 + c^2 - 2cd + d^2 \\ \text{" ADC " } \quad b^2 &= h^2 + d^2 \end{aligned}$$

Saame kaks võrrandit kahe tundmatuga d ja h. Lahutame ülemisest võrrandist alumise, saame

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2cd; \quad d = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$$

Asetame saadud d väärtuse teise võrrandisse, saame

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c} \right)^2; \quad h^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c} \right)^2$$

Võime avaldus on ruutude vahe, mille lahutame teguriteks

$$\left(b + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c} \right) \left(b - \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c} \right)$$

Edasi arendades saame

$$\begin{aligned} & \frac{(2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2)}{4c^2} \\ & \frac{[a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2]}{4c} \\ & \frac{(a + b - c)(a - b + c)(b + c + a)(b + c - a)}{4c^2} \end{aligned}$$

Tähistades kolmnurga ümbermõõtu (perimeeter) tähega 2p, seega p on poolperimeeter, saame $a+b+c = 2p$; $a+b-c = 2(p-c)$; $a+c-b = 2(p-b)$; $a+c-a = 2(p-a)$

$$h^2 = \frac{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)}{4c^2}$$

$$h = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Kolmnurga pinna saame, kui aluse c korrutame leitud kõrgusega ning jagame pooleks, saame

$$S = \frac{c}{2} \cdot \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \dots \text{Heroni valem}$$

1. näide. Leida kolmnurga pind, kui $a = 15\text{m}$, $b = 19\text{m}$ ja $c = 22\text{m}$!

$$2p = 15 + 19 + 22 = 56; \quad p-a=13; \quad p-b=9; \quad p-c=6 \quad p=28$$

$$S = \sqrt{28 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 6} = 140,19 \text{ m}^2$$

2. näide. Arvutada võrkülge kolmnurga pind, mille külj on 6m!

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \quad \dots \text{võrkülge kolmnurga pinna valem}$$

$$S = \frac{6^2}{4} \sqrt{3} = 9 \cdot \sqrt{3} = 9 \cdot 1,73 = 15,57 \text{ m}^2$$

Ulesanded:

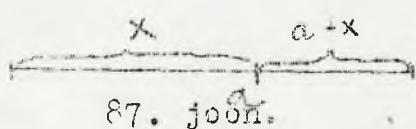
Nr³³ Arvutada kolmnurga pind, mille küljed on 36 dm, 48 dm ja 60dm!
(Vastus: 864 dm²)

Nr³⁴ Kui suur on kolmnurgakujuline põld, mille küljed on 250 m, 200m ja 150m! (Vastus: 150 aari)

Kuldlõige.

Sarnasuse õpetuses käsitlesime sirglõigu jagamist ükskõik missuguseks osaks. Nüüd käsitleme sirglõigu jagamist kaheks, n.n. kuld lõiguks mis kõlab järgmiselt:

Jagada antud sirglõik kaheks nõnda, et kogu lõik suhtub suuremasse ossa, nagu suurem osa suhtub vähemasse ossa.



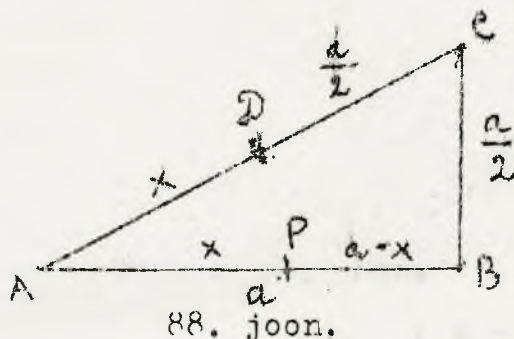
Olgu antud sirglõik a (87. joon.), mille jagamisel kaheks osaks x ja $a-x$ nõnda, et

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

Seega suurem on keskmine võrdeline kogu lõiguga ja vähema osa vahel.

$$x^2 = a(a-x)$$

Graafiliselt leiame järgmiselt (88. joon.). Püstitame ühest sirglõigu otsast (punktist B) ristjoone, millele asetame $\frac{a}{2}$, saame punkti C. Uhen-



dame sirgega punktid A ja C ja joonestame sirkliga punktist C kaare raadiusega $\frac{a}{2}$, mis lõikab sirge AC punktis D. Eeski joonestame kaare punktist A raadiusega AD, mis lõikab antud sirglõigu punktis P. Punkt P jagab antud sirglõigu kaheks kuldseks lõiguks, sest

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 = a(a-x)$$

Algebraliselt kuulub selle võrrandi lahendamine ruutmvõrrandi piirkonda, mis ei ole ette nähtud selles kursuses. Annan siiski lõppvalemi x leidmiseks, et sellega sead küsimust lõpetada.

$$x = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) \approx 0,62 a$$

Seega sirglõigu suurem osa on umbes 62 % ja väiksem osa umbes 38 % kogu sirglõigust.

Kuldlõiguks nimetatakse sellepärast, et see on sobiv, "silmale hea vaadata". Näiteks, kui võtame raamatu või pildi suuruse, siis ei meeldi meile väga kitsas pilt ega raamat, samuti ka mitte liiga lai. Väga sobiv on raamatu formaat, mille mõõdud on kuldlõigulised. Peasegu kõik riigi lipud on tehtud kuldlõigulised. Näiteks, kui tahame teha Eesti lippu, mille pikkus on 3m, siis si seal selle lipu laiuse võime arvutada ligikaudu nõnda

$$\text{laius} = 3 \cdot \frac{38}{62} = 1,84 \text{ m}$$

Kontrolltöö nr. 4.

1. Ruudu ja ringi pinnad on võrdsed ning kumbki on 420 dm^2 . Kui suur on nende ümbermõõtude vahe?

2. Kui suur peab olema ringikujulise akna raadius, mis laseb sama palju valgust läbi, kui ristküliku-kujuline aken mõõtudega 2m ja 3,5m?

3. Kaks laeva väljuvad ühest punktist: üks sõidab kursiga põhja suunas kiirusega 10 sõlme ja teine ida suunas kiirusega 12 sõlme. Leida nende kaugus 6 tunni pärast!

4. Kraavi laius pealt on 1,2 m ja põhjast 0,4 m ning sügavus 0,8m. Mitu tonni vett võib voolata läbi kraavi ristlõikepinna ööpäeva jooksul, kui voolu kiirus on 8 km/tund, ning kraav on ääreni vett täis?

5. Palju rohuseemet läheb korrapärase kuuekandilisele murule külvamiseks, kui kuusenurga külg on 2,5 m ja ühele sarile (100 ruutmeetrit) läheb 2,5 kg seemet?

6. 72 cm pikkune kõõl toetub 76,93 cm-sele kaarele. Leida kõõlu ja kaare vaheline segmendi pind, kui ringi raadius on 48 cm!

7. Punkti kaugus ringist on 2 cm. Samast punktist ringile tõmmatud puutuja pikkus on 6 cm. Leida ringi raadius!

8. Konstruuda ruut, mille pind on kaks korda suurem antud ruudu pinnast!

9. Tõesta, et a) kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis!

b) " " jagavad kolmnurga kuueks võrdseks kolmnurgaks!

c) " " lõikavad üksteist nõnda, et tipu-poolne mediaani osa on kaks korda suurem aluse-poolsest osast!

10. Kolmnurga-kujuline põld, mille küljed on 247 m, 266m ja 285 m, andis saaki 2,2 tonni hektaarilt. Kui suur oli kogu saak?