I часть

1. Необходимо решить все 5 заданий. Для написания работы даётся 120 минут.
2. Тексты заданий не надо переписывать на лист с решениями.
3. Решение каждого задания следует записывать в листе решений на предусмотренное для этого место.
4. Если решение задания не поместилось на предусмотренном для этого месте, продолжите решение на дополнительном листе, который получите у экзаменационной комиссии. Обязательно напишите сноску о продолжении решения.
5. Чертежи, выполненные на листе заданий, можно при необходимости дополнять, т.е. переносить чертежи на лист с решениями не обязательно.

1. (10 баллов) Упростите выражение $\left[\dfrac{a}{a^2-2ab+b^2}-\dfrac{a}{(a+b)^2}\right]\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-b^{-2}\right)^2$ и найдите его точное значение при $a=-4+\log_5 125$ и $b=\sqrt[3]{2}$.

2. (10 баллов) Из 30 учащихся во время урока математики отсутствовало 20% учащихся. Известно, что $\dfrac{2}{3}$ от общего числа отсутствующих были юноши, что составило 20% от общего количества юношей класса.

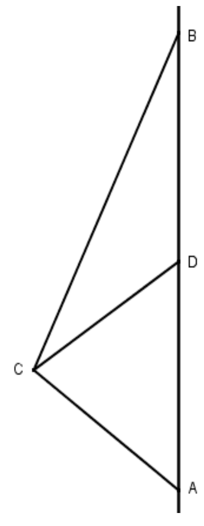
Сколько девушек присутствовало на уроке математики? 2 балла

На том же самом уроке к доске вызываются учащиеся. Какова вероятность того, что
1) один случайно вызванный учащийся окажется юношей; 1 балл
2) случайно вызванные двое учащихся окажутся девушкой и юношей; 3 балла
3) из четырёх случайно вызванных учащихся будет не менее 3 девушек? 4 балла

3. (10 баллов) Дана функция $f(x)=(x^2-4)(2x-1)$.
Найдите
1) нули функции; 2 балла
2) область отрицательности функции; 2 балла
3) производную функции; 2 балла
4) координаты точки максимума функции. 4 балла

4. (10 баллов) Две машины скорой помощи выезжают одновременно навстречу друг другу: одна едет из больницы к месту происшествия, а другая - с места происшествия в больницу. В первую минуту каждая машина проезжает путь длиной 1 км. В каждую следующую минуту первая машина проезжает путь на $\dfrac{1}{6}$ км, а вторая машина - на $\dfrac{1}{12}$ км длиннее, чем за предыдущую минуту. Определите, через сколько минут машины встретятся и какова скорость (км/ч) машин в момент встречи, если известно, что расстояние от больницы до места происшествия 23 км.

5. (10 баллов) Три хутора *A, B* и *D* расположены у прямолинейного участка шоссе. От каждого хутора прямая дорога ведёт к почтовой конторе *C* (см. рисунок). В целях экономии средств местное самоуправление решило закрыть дороги *AC* и *BC* для движения и сохранить только обслуживание дорог *AB* и *CD*. Известно, что на плане с масштабом 1: 20 000 длина отрезка *AB* составляет 93 мм, расстояния *AD* и *DB* равны, а также $\angle CAB=53^\circ$ и $\angle ABC=25^\circ$. Определите, на сколько километров для жителей хуторов *A* и *B* увеличится путь до почтовой конторы *C* в связи с закрытием дорог. Ответ дайте с точностью до 0,01 км.



II часть

1. Необходимо решить задания 6, 7, а также по собственному выбору одно из заданий 8 или 9. Для написания работы даётся 150 минут.
2. Оцениваются решения только трёх заданий (двух 15-балльных и одного 20-балльного).
3. Порядковый номер представляемого для оценивания задания по выбору запишите на лист с решениями в предусмотренную для этого клетку.
4. Решение каждого задания следует записывать в листе решений на предусмотренное для этого место.
5. Если решение задания не поместилось на предусмотренном для этого месте, продолжите решение на дополнительном листе, который получите у экзаменационной комиссии. Обязательно напишите сноску о продолжении решения.
6. Чертежи, выполненные на листе заданий, можно при необходимости дополнять, т.е. переносить чертежи на лист с решениями не обязательно.

6. (15 баллов) Даны функции $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)$ и $g(x)=\sin 2x$.

1) Докажите справедливость равенства $f(x)=-\cos x$. 4 балла

2) Найдите решения уравнения $g(x)=-\cos x$ на отрезке $[0;2\pi]$. 6 баллов

3) В одной системе координат постройте графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. 5 баллов

Используя данный чертеж, решите неравенство $f(x)>g(x)$ на отрезке $[0;2\pi]$.

7. (15 баллов) Точка $A(4;\,3)$ является одной из вершин прямоугольника $ABCD$, вершина B расположена на оси Ox, а прямая CD, параллельная стороне прямоугольника AB, лежит на прямой, заданной уравнением $x-y+7=0$.

1) Вычислите координаты вершин B, C и D прямоугольника $ABCD$ и постройте прямоугольник $ABCD$ в координатной плоскости. 7 баллов

2) Составьте уравнение прямой, на которой лежит диагональ AC прямоугольника. 2 балла

3) Вычислите точное значение периметра прямоугольника $ABCD$. 3 балла

4) Составьте уравнение окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$. 3 балла

---

8. (20 баллов) Ведётся строительство здания, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, объём которого равен $\boldsymbol{V}$ м^3. Крыша здания является прямоугольником, одна сторона которого в 2 раза длиннее другой. Стоимость одного квадратного метра крыши составляет 1125 крон. Стоимость одного квадратного метра одной из двух меньших боковых стен здания равна 2500 крон, а стоимость одного квадратного метра остальных трёх боковых стен равна 1300 крон.

1) Определите, при каких значениях длины, ширины и высоты здания, выраженных через объём здания $\boldsymbol{V}$, стоимость данных строительных работ будет минимальной.

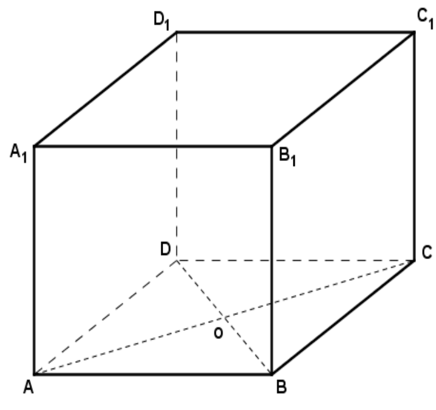
2) Вычислите наименьшую стоимость строительных работ, если объём здания 2744 м^3.

9. (20 баллов) Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок) является ромб $ABCD$, острый угол $\angle BAD$ которого равен α и диагональ BD равна d. Диагональ прямого параллелепипеда CA_1 составляет с основанием угол β.

1) Выразите площади диагональных сечений через углы α и β и диагональ d.

2) В данный прямой параллелепипед вписана пирамида OA_1KL, вершины K и L которой являются соответственно серединами рёбер D_1C_1 и C_1B_1 прямого параллелепипеда, а точка O является точкой пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Найдите отношение объёмов прямого параллелепипеда и пирамиды OA_1KL.

3) Докажите, что прямая A_1O перпендикулярна прямой BD.



I часть

Задание № 1. (10 баллов)

Упростите выражение $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a\sqrt{a}+a\sqrt{b}}-\dfrac{a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-1}$

и письменно вычислите его значение при $a=4^{-2}$ и $b=27^{\frac{2}{3}}$.

Задание № 2. (10 баллов)

Решите уравнение.

а) $3^{x+2}+3^{x-2}=246$

б) $\cos^2 x-1=\sin^2 x-0{,}5$. Найдите корень уравнения на интервале $\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ и выполните проверку.

Задание № 3. (10 баллов)

Дана функция $f(x)=-x^3+3x^2-7$.

1. Покажите, что $f(-2)>f(3)$.
2. Найдите производную функции $f(x)$.
3. Найдите интервал возрастания функции $f(x)$ и вычислите координаты точек экстремума графика функции.
4. Постройте график функции $f(x)$ на отрезке $[-2;3]$, используя полученные выше результаты.

Задание № 4. (10 баллов)

Фирма рекламировала свою продукцию в журналах, на телевидении и на радио. При подведении итогов выснилось, что

а) затраты на рекламу в журналах составили 62,5% от затрат на рекламу на телевидении;

б) затраты на рекламу на телевидении и затраты на рекламу на радио относятся, как $1\dfrac{2}{3}:0{,}75$;

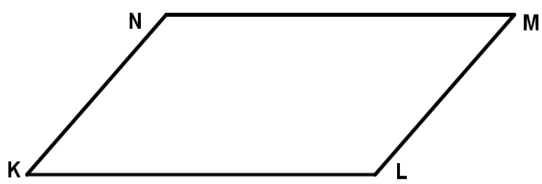
в) общая сумма затрат на рекламу в журналах и на радио была на 75 000 крон больше суммы затрат на рекламу на телевидении.

Найдите общие затраты фирмы на рекламную кампанию.

Задание № 5. (10 баллов)

Диагональ *LN* параллелограмма *KLMN* равна 6,7 см, а сторона *LM* равна 5,4 см.

Угол *KNL* равен 102°.



1. Отметьте данные на рисунке.
2. Вычислите периметр и площадь параллелограмма *KLMN*.
3. Биссектриса угла *KNL* пересекает сторону *KL* параллелограмма в точке *T*. Вычислите длины отрезков *KT* и *TL*.

NB! Все конечные результаты округлите с точностью до десятых.

II часть

Задание № 6. (15 баллов)

Дана функция $f(x)=x^2+4x+3$, график которой пересекает ось Оy в точке A, а ось Ox в точках $B(x_1;0)$ и $D(x_2;0)$, где $x_1<x_2$. Прямая ***s*** проходит через точки A и B, а прямая ***t*** проходит через точки A и D. Прямая ***u*** параллельна прямой $y=-x$. Прямые ***s*** и ***u*** пересекаются в точке B, а прямые ***t*** и ***u*** пересекаются в точке C.

1. Составьте уравнения прямых ***s***, ***t*** и ***u*** и вычислите координаты точки C.
2. Постройте в координатной плоскости график функции $f(x)$ и прямые ***s, t*** и ***u***.
3. Покажите, что треугольник ABC является прямоугольным, и вычислите угол BAC треугольника.

Задание № 7. (15 баллов)

Два тела движутся прямолинейно.

1. Участки пути, пройденные первым телом за каждую секунду, составляют арифметическую прогрессию. За первую секунду тело прошло путь длиной 63 мм, и к концу третьей секунды оно прошло путь длиной 25,2 см. Найдите длину пути, которую пройдёт первое тело за четвёртую секунду движения.
2. Второе тело за каждую секунду, начиная со второй, проходит путь, который в одно и то же число раз длиннее пути, пройденного за предыдущую секунду. За первые три секунды тело прошло путь длиной 304 мм, а за четвёртую секунду прошло путь, который на 15,2 см длиннее пути, пройденного за первую секунду. Найдите время, которое потребовалось второму телу для прохождения пути длиной 205,9 см.

Задание № 8. (20 баллов)

1. Дана функция $f(x)=ax^2+b\ln x+c$, где a, b и c действительные числа.
   Найдите значения коэффициентов a, b и c, при которых график функции $f(x)$ проходит через точку $P(1;3)$ и прямая $y=4x+a$ является касательной к графику функции в данной точке. Проверьте полученный результат.
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)=4+6\ln x-x^2$ на отрезке $[1;e]$.

Задание № 9. (20 баллов)

В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ (см. рисунок). Большее ребро при основании прямоугольного параллелепипеда равно ***a***, и острый угол между диагоналями основания равен α. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с меньшей по площади боковой гранью угол β.

1. Выразите площадь боковой поверхности цилиндра через ***a***, α и β.
2. Покажите, что при $\boldsymbol{a}=\sqrt{3}$ см, $\alpha=60^\circ$ и $\beta=45^\circ$ площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi\sqrt{2}$ см^2.