

## **2014. aasta kitsa matemaatika riigieksami analüüs**

---

**Tartu Ülikooli matemaatika-informaatikateaduskonna emeriitdotsent  
Lea Lepmann**

## **1. Riigieksami eesmärk**

Haridus- ja teadusministri määruse nr 59 kohaselt on riigieksami eesmärgid järgmised:

1) tagada eksamitulemuste üleriigiline võrreldavus, et õpilasel, lapsevanemal, koolil ja kooli pidajal saada võimalikult objektiivne ettekujutus õpitulemuste saavutatusest; 2) koolil, kooli pidajal, Haridus- ja Teadusministeeriumil, õpilastel, lastevanematel saada tagasisidet õppimise ning õpetamise tulemuslikkusest koolis; 3) saada ülevaade riiklikus õppekavas sätestatud õpitulemuste saavutatusest eksamiainetes hariduspoliitiliste otsuste tegemiseks; 4) toetada õppekava rakendamist, suunata eksamiülesannete valiku kaudu õppeprotsessi; 5) siduda järjestikuste haridustasemete õppekavad ning võimaldada kasutada riigieksamitulemusi õpingute jätkamisel, anda võimalus kasutada riigieksamitulemusi rahvusvahelisel tasandil.

## **2. 2014. aasta matemaatika riigieksam**

2014. aasta matemaatika riigieksam oli esimene 2011. aastal rakendunud õppekava kohane riigieksam, mille sooritamine oli kõigile gümnaasiumilõpetajatele kohustuslik. Iga eksaminand võis valida kas kitsa või laia matemaatika eksami. Nii kitsa kui ka laia matemaatika eksamil oli kaks osa (I ja II osa). Esimene osa koosnes seitsmest ja teine viiest ülesandest. Mõlema osa lahenduste eest võis saada maksimaalselt 50 punkti. Kitsa matemaatika eksamitöös oli koos alaülesannete ehk osistega kokku 24 alaülesannet, mis jaotusid eksami mõlema osa vahel võrdselt (tabel 1). Nii laia kui ka kitsa matemaatika eksam sisaldas seitset analoogset ülesannet või selle osa (tabelis 1 toonitud lahtrid), mis olid nn ühisosa ülesanded ja mille eesmärk oli paigutada laia ning kitsa matemaatika eksami sooritanud eksaminandid samale skaalale. Ühisosa ülesannete lahenduste eest võis saada summaarselt 50 punkti, neist 35 punkti I osast ja 15 punkti II osast.

## **3. Kitsa matemaatika eksami ülesehitus ja sisu**

Tabelis 1 on toodud iga ülesande sisu ja kitsa matemaatika ainekava kursuste teemade vastavus. Tabelis märgivad kursusi järjekorranumbrid. Eksami koostajad on valinud ülesandeid kõigi kaheksa kitsa matemaatika kursuse teemade hulgast. Enamikus ülesannetest on seostatud mitme kursuse materjal (paksus kirjas on põhiline kursus). Kõige enam on ülesandeid, mille sisu hõlmab I kursuse teemasid. Ka funktsioonide temaatikaga seotud ülesandeid (kursused V ja VI) on üsna palju. Elulise kontekstiga ülesandeid on eksamitöös viis (42%).

Tabelis 1 on ülesannete kognitiivse taseme kirjeldamiseks kasutatud järgmist tähistust:

A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;

B – ühe- või kaheetapilise, suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;

C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Tabelisse on märgitud kõrgeim kognitiivne tase, mida eksaminand ülesannete lahendamisel kasutama pidi. Näiteks ülesanne, milles tuli teisendada avaldis või lahendada võrrand, on tähistatud tasemega A. Kui oli vaja arvutada tõenäosus kahe ühest riigist pärit meloni võtmiseks, siis pidi eksaminand valima, millist mudelit ta tõenäosuse leidmiseks kasutab. See ülesanne on tähistatud tasemega B. Kui vastuseni jõudmiseks oli vaja leida pikem lahendustee (nt kasutada järjestikku rohkem kui kahte mudelit), siis on tegemist tasemega C. A-taseme ülesandeid oli eksamitöös kõige vähem ja need kuulusid I ossa. Kaks kolmandikku ülesannetest nõudsid/eeldasid mitme kursuse teemasid hõlmavaid teadmisi ja nende koos (samaaegset) kasutamist. Mõistagi ei pruugi ülesannete jaotus eelpool nimetatud tasemeteks olla ühene, sest see võib vahel sõltuda ka valitud lahendustest ja eksaminandi eelteadmistest.

Tabel 1. Kitsa matemaatika eksami ülesehitus, punktide jaotus ja sisu

| Eksami osa       | I osa |    |   |   |      |       |      |         |    |       |        |   |          |           | II osa |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------------------|-------|----|---|---|------|-------|------|---------|----|-------|--------|---|----------|-----------|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Ülesanne         | 1     | 2  |   |   | 3    | 4     | 5    | 6       | 7  | 1     | 2      | 3 | 4        | 5         | 1      | 2  | 3  | 4  | 5  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| Ala-<br>ülesanne | -     | 1  | 2 | 3 | -    | 1     | 2    | 1       | 2  | -     | 1      | 2 | 1        | 2         | 3      | 1  | 2  | 3  | 1  | 2  | 1  | 2  | 1  | 2  |
| Punktide arv     | 5     | 5  |   |   | 5    | 5     | 10   | 10      | 5  | 5     | 5      | 5 | 10       | 10        | 10     | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| Kursus           | I     | IV |   |   | I, V | II, V | V, I | II, VII | VI | VI, V | III, I | I | VII, III | VIII, VII |        |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Kognitiivne tase | A     | B  |   |   | B    | A     | A    | C       | C  | B     | B      | C | B        | C         | B      | C  | B  | C  | B  | C  | B  | C  | B  | C  |

#### 4. Eksami üldstatistika

Kokku sai matemaatika riigieksami sooritajatest tulemuse 8238, neist 4067 (49,4%) olid valinud kitsa ja 4171 (50,6%) laia matemaatika eksami, st mõlema eksami valinuid oli enam-vähem võrdselt. Valiku erisusi võib täheldada eksaminandide soo ja soorituskeelega. Selgub, et vene soorituskeele eksaminandidest valis oluliselt suurem hulk kitsa matemaatika eksami kui laia matemaatika eksami. Laia matemaatika eksami valinute osakaal (ca 39%) sarnanes eelnevatel aastatel matemaatika riigieksami valinute osakaaluga. Eesti soorituskeele eksaminandide jaotus kahe eksami vahel oli võrdsem (tabel 2, kus sulgudes on esitatud vastavasse rühma kuuluvate eksaminandide arvud). Kolm inglise keeles eksami sooritanut valisid kitsa matemaatika eksami. Tabelist 2 on näha, et naised eelistasid kitsast, mehed aga laia matemaatika eksamit. Ilmselt tingis sellise valiku tulevane eriala.

Tabel 2. Eksami valik soorituskeele ja soo järgi

| Eksami liik                    | Eesti soorituskeel | Vene soorituskeel | Naised       | Mehed        |
|--------------------------------|--------------------|-------------------|--------------|--------------|
| <b>Laia matemaatika eksam</b>  | 53,3% (3585)       | 38,7% (586)       | 45,3% (2112) | 57,5% (2059) |
| <b>Kitsa matemaatika eksam</b> | 46,7% (3137)       | 61,3% (927)       | 54,7% (2548) | 42,5% (1519) |
| <b>Kokku</b>                   | 100% (6722)        | 100% (1513)       | 100% (4660)  | 100% (3578)  |

Kitsa matemaatika eksami eelistasid valida gümnaasiumi õhtuse õppe (85,1%), eksternõppe (74,6%) ja kutseõppe (70,0%) läbinud eksaminandid. Gümnaasiumi päevase õppe lõpetanutest valis kitsa matemaatika eksami 44,7% ja varemlõpetanutest vaid 27,2%.

Ka maakondade lõikes varieerus kitsa matemaatika eksami valinute osakaal suuresti. Enim valisid kitsa matemaatika eksamit Läänemaa (65,8%), Jõgevamaa (63,2%) ja Saaremaa (61,6%) koolide õpilased, kõige vähem aga Põlvamaa (19,0%), Hiiumaa (27,1%) ja Valgamaa (31,4%) koolide õpilased. Põhjalikumalt on selle valiku seost eksamitulemusega selgitatud analüüsi osas 5.2.

## 5. Kitsa matemaatika eksami tulemused

### 5.1. Eksamitulemused soo, õppekeele ja õppevormi järgi

Kitsa matemaatika eksami keskmine tulemus kogu kontingendil oli 30,2 punkti 100st. Null punkti said 0,8% ehk 34 eksaminandi (10 meest ja 24 naist), kellest 16 olid eesti ja 18 vene soorituskeelega eksaminandid. Meeste parim tulemus oli 94 punkti, naistel 98 punkti.

Naiste keskmine tulemus oli oluliselt parem meeste keskmisest tulemusest (vastavad keskmised 31,0 punkti ja 28,9 punkti) (tabel 3). Naistel oli alla 20-punktiste tööde osakaal väiksem ja vähemalt 80-punktiste tööde osakaal suurem kui meestel. Eesti ja vene soorituskeelega eksaminandide tulemused oluliselt ei erinenud (siin ja edaspidi on erinevuse olulisust hinnatud usaldusnivool 0,05). Siiski oli mõlemas äärmusgrupis (nii nõrgas kui ka tugevas) vene soorituskeelega eksaminandide osakaal mõnevõrra suurem kui eesti soorituskeelega eksaminandidel (tabel 3, milles N tähistab siin ja edaspidi vastavasse gruppi kuuluvate eksaminandide arvu). Kõige kõrgem oli kolme inglise keeles eksami sooritanud eksaminandi keskmine tulemus. Rühma väiksust arvestades jäetakse nad edasises soorituskeelepõhises analüüsis vaatluse alt välja.

Tabel 3. Keskmine tulemus soo ja soorituskeele järgi

|                     | N    | Keskmine tulemus (punktides) | Alla 20 punkti (%) | 80–100 punkti (%) |
|---------------------|------|------------------------------|--------------------|-------------------|
| <b>Mehed</b>        | 1519 | 28,9                         | 40,6%              | 2,2%              |
| <b>Naised</b>       | 2548 | 31,0                         | 38,0%              | 4,0%              |
| <b>Eesti keel</b>   | 3137 | 30,1                         | 38,3%              | 2,8%              |
| <b>Vene keel</b>    | 927  | 30,4                         | 41,7               | 5,2%              |
| <b>Inglise keel</b> | 3    | 59,3                         | 0%                 | 0%                |

Tabelis 4 on toodud eksaminandide tulemused õppevormi järgi (vt tabel 4, milles *Min* tähistab eksami madalaimat ja *Max* kõrgeimat tulemust). Ootuspäraselt oli kõige kõrgem keskmine tulemus gümnaasiumi päevase õppe lõpetanutel (34,2 punkti). Neile järgnes varemlõpetanute keskmine tulemus (24,2 punkti). Eksternõppe ja kutseõppe läbinute keskmine tulemus jäi alla 15 punkti. Oluline on märkida, et kitsa matemaatika eksami valinutest ligi üks neljandik (23,6%) ei kuulunud gümnaasiumi päevase õppe lõpetajate hulka (laia matemaatika eksami sooritajate seas oli neid vaid 7,6%). Seetõttu oli gümnaasiumi päevase õppe lõpetanute keskmine tulemus 4 punkti võrra kõrgem üldisest keskmisest (või oli muu õppevormi läbinute suure osakaalu tõttu üldine keskmine niipalju madalam).

Tabel 4. Keskmine tulemus õppevormi järgi

| Õppevorm                              | N    | Keskmine tulemus (punktides) | Min | Max | 90–100 punkti (%) |
|---------------------------------------|------|------------------------------|-----|-----|-------------------|
| <b>Eksternõppe või muu</b>            | 53   | 11,1                         | 0   | 48  | 0                 |
| <b>Gümnaasiumi päevane õpe</b>        | 3109 | 34,2                         | 0   | 99  | 1,4               |
| <b>Gümnaasiumi õhtune või kaugõpe</b> | 729  | 17,8                         | 0   | 85  | 0                 |
| <b>Kutseõppe</b>                      | 133  | 14,6                         | 0   | 70  | 0                 |
| <b>Varemlõpetanud</b>                 | 43   | 24,2                         | 0   | 82  | 0                 |
| <b>Kokku</b>                          | 4067 | 30,2                         | 0   | 99  | 1,1               |

## 5.2. Eksamitulemused maakondade lõikes

70% eksaminandidest sooritas eksami neljas suurlinnaga maakonnas (Harjumaa, Tartumaa, Ida-Virumaa ja Pärnumaa) ja ülejäänud 30% jagunesid 11 maakonna vahel. Tabelis 5 toodud pingerea eesotsas asuvad just väiksemad maakonnad, nagu Saaremaa, Viljandimaa, Läänemaa ja Jõgevamaa. Ka pingerea lõpus on väikesed maakonnad. Suurtest maakondadest on parim Ida-Virumaa.

Gümnaasiumi päevase õppe lõpetanute rühmas on esiviisikus samuti Saaremaa (48,6 punkti), Viljandimaa (42,4 punkti), Jõgevamaa (41,3 punkti), Läänemaa (37,3 punkti) ja Ida-Virumaa (37,0 punkti) ning madalaimate tulemustega on Valgamaa (28,2 punkti), Võrumaa (27,0

punkti) ja Põlvamaa (20,2 punkti). Kutseõppe lõpetanute rühmas on parimad tulemused Läänemaal (23,8 punkti), Valgamaal (20,0 punkti), Harjumaal (18,3 punkti), Viljandimaal (15,9 punkti) ja Ida-Virumaal (15,2 punkti) ning madalaimad Järvamaal (7,4 punkti), Raplomaal (6,8 punkti) ja Võrumaal (6,8 punkti) (tabel 5).

Maakondade kõrgeim ja madalaim keskmine tulemus erinevad teineteisest 20,3 punkti võrra. Nende kahe äärmuse vahele jäävate maakondade keskmised kahanevad järjest vaid 1 punkti kaupa vahemikus 35,6 kuni 24. Positiivsena tuleb märkida, et kõigis maakondades (peale kahe erandi) küünib kõrgeim saavutatud tulemus vähemalt 80 punktini ja vähemalt 90-punktiste tööde osakaal maakondade lõikes oluliselt ei erine. Alla 20-punktiste tööde osakaal (22,8% kuni 60,0%) varieerub maakonniti tugevalt.

Tabel 5. Tulemused maakonniti

| Maakond    | N    | N(%) | Keskmine<br>tulemus<br>(punktides) | Min | Max | 90–100<br>punkti<br>(%) | Kitsa<br>matemaatika<br>eksami<br>valinuid (%) |
|------------|------|------|------------------------------------|-----|-----|-------------------------|------------------------------------------------|
| Saare      | 149  | 3,7  | 40,5                               | 1   | 98  | 2,7                     | 61,6                                           |
| Viljandi   | 145  | 3,6  | 35,6                               | 2   | 93  | 0,7                     | 51,8                                           |
| Lääne      | 127  | 3,1  | 34,5                               | 3   | 94  | 0,8                     | 65,8                                           |
| Ida-Viru   | 357  | 8,8  | 33,3                               | 0   | 99  | 2,2                     | 57,1                                           |
| Jõgeva     | 117  | 2,9  | 32,8                               | 0   | 96  | 1,7                     | 63,2                                           |
| Hiiu       | 19   | 0,5  | 31,0                               | 5   | 68  | 0                       | 27,1                                           |
| Tartu      | 474  | 11,7 | 30,6                               | 0   | 94  | 0,6                     | 35,8                                           |
| Rapla      | 135  | 3,3  | 29,6                               | 0   | 92  | 0,7                     | 60,5                                           |
| Harju      | 1735 | 42,7 | 29,5                               | 0   | 99  | 1,2                     | 50,9                                           |
| Pärnu      | 274  | 6,7  | 28,1                               | 0   | 93  | 0,7                     | 48,3                                           |
| Valga      | 50   | 1,2  | 27,3                               | 3   | 91  | 2,0                     | 31,4                                           |
| Järva      | 113  | 2,8  | 26,8                               | 0   | 81  | 0                       | 57                                             |
| Lääne-Viru | 198  | 4,9  | 26,0                               | 2   | 94  | 0,5                     | 55,5                                           |
| Võru       | 144  | 3,5  | 24,0                               | 1   | 80  | 0                       | 58,1                                           |
| Põlva      | 30   | 0,7  | 20,2                               | 4   | 46  | 0                       | 19,0                                           |
| Kokku      | 4067 | 100  | 30,2                               | 0   | 99  | 1,1                     | 49,4                                           |

Keskmine tulemus on seotud ka kitsa matemaatika eksami valinute osakaaluga: kõrgema tulemusega maakondades valis suurem osa õppuritest kitsa matemaatika eksami. Vastav Pearsoni korrelatsioonikordaja väärtus on 0,49. Seega võiks 24% keskmise tulemuse varieeruvusest kanda sobiva eksamivaliku arvele.

### 5.3. Eksamitulemused I ja II osa ning ühisosa lõikes

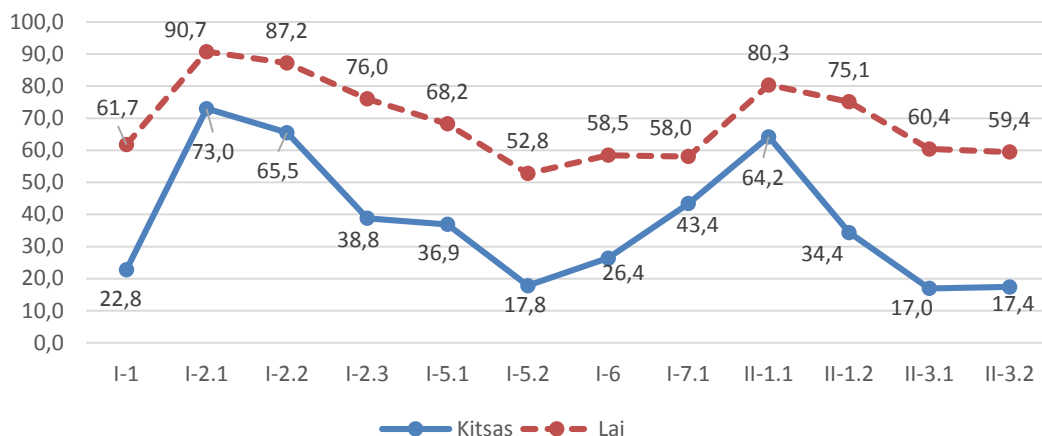
Matemaatika riigieksami ülesanded olid jaotatud kahte ossa (7 + 5 ülesannet). Kummagi osa lahenduste eest võis eksaminand saada maksimaalselt 50 punkti. Laia ja kitsa matemaatika eksami ülesannete komplektis oli seitse analoogset ülesannet (e ühisosa ülesanded). Nende lahenduste eest võis eksaminand saada summaarselt 50 punkti. Nii I kui ka II osa ning ka ühisosa minimaalne tulemus oli 0 punkti ja maksimaalne 50 punkti.

Esimese osa keskmine tulemus oli ootuspäraselt oluliselt kõrgem II osa keskmisest tulemusest nii kogu kontingendil kui ka alamrühmades (tabel 6). Töö esimese osa ülesanded olid suunatud rohkem teadmiste kontrollile ja nende rakendamisele suhteliselt tuttavas olukorras. Teise osa ülesanded eeldasid aga rohkem matemaatilise arutlemise oskust, erinevate teemade seostamist ja rakendusi mittestandardsetes olukorras.

Tabel 6. Eksamiosade tulemused soo, soorituskeelega ja õppevormi järgi (punktides)

|                | Keskmine<br>tulemus | Mediaan | Mehed | Naised | Eesti | Vene | Gümna<br>päevane õpe | Gümna<br>õhtune ja<br>kaugõpe | Kutseõpe |
|----------------|---------------------|---------|-------|--------|-------|------|----------------------|-------------------------------|----------|
| <b>I osa</b>   | 17,2                | 15      | 16,9  | 17,4   | 17,1  | 17,6 | 19,1                 | 11,0                          | 10,2     |
| <b>II osa</b>  | 12,7                | 9       | 12,0  | 13,7   | 13,1  | 12,9 | 15,1                 | 6,8                           | 4,3      |
| <b>Ühisosa</b> | 15,3                | 13      | 14,9  | 15,6   | 15,1  | 16,2 | 17,2                 | 9,6                           | 8,4      |
| <b>Kokku</b>   | 30,2                | 25      | 28,9  | 31,0   | 30,1  | 30,5 | 34,2                 | 17,8                          | 14,6     |

Eesti ja vene soorituskeelega eksaminandide keskmised tulemused ei erinenud statistiliselt teineteisest kummagi osa puhul. I osa tulemus oli mõnevõrra kõrgem vene soorituskeelega ja II osa tulemus eesti soorituskeelega eksaminandidel. Oluline erinevus meeste ja naiste summaarses eksamitulemuses oli tingitud just II osa tulemustest, kus meeste sooritus jäi oluliselt madalamaks naiste omast. I osa keskmised tulemused sooti oluliselt ei erinenud. Kui gümnaasiumi päevase õppe lõpetajate I osa keskmine tulemus oli teiste alarühmadega võrreldes peaaegu kaks korda kõrgem, siis II osa puhul oli erinevus juba palju suurem. Ilmselt said teiste õppevormide eksaminandid põhiosa oma punktidest just I osa ülesannete lahenduste eest.



Joonis 1. Kitsa ja laia matemaatika eksami ühisosa ülesannete lahendatus (protsentides)

Ühisosa ülesannete keskmine tulemus (15,3 punkti) moodustab kitsa matemaatika eksami keskmisest tulemusest 50,7%. Seega osutusid ühisosa ülesanded ja ülejäänud eksamiosa ülesanded kitsa matemaatika eksami tegijatele üheraskusteks. Naistel oli ühisosa ülesannete keskmine tulemus oluliselt kõrgem meeste omast, samuti erinesid ühisosa tulemused oluliselt soorituskeele lõikes. Kõige suuremad erinevused ilmnesisid kitsa ja laia matemaatika eksami sooritajate keskmiste tulemuste võrdluses, kusjuures erinevus oli statistiliselt oluline kõigi ülesannete puhul (joonis 1).

Eksami kahe osa vaheline Pearsoni korrelatsioonikordaja on 0,83 ehk 69% ühe osa tulemuse varieeruvusest kirjeldab teise osa tulemuse varieeruvus. Kogu eksamitöö keskmise tulemusega on I ja II osa korrelatsioonid ühtmoodi kõrged (korrelatsioonikordajad vastavalt 0,95 ja 0,96). Sama võib väita ka ühisosa ülesannete ja ülejäänud ülesannete keskmise tulemuse seose kohta. See on kitsa matemaatika eksami puhul samuti 0,83. Seosekordajate kõrged väärtused näitavad, et ilmselt oleksid eksamitulemused olnud enam-vähem samad ka väiksema ülesannete arvuga.

#### 5.4. Eksamitulemused ülesannete lõikes

Järgnevas analüüsis on kõigepealt võrreldud iga ülesande lahendatust soo ja soorituskeele järgi, seejärel on keskendutud ülesannete sisulisele analüüsile. Kuna ülesannete võimalikud maksimumpunktid on kas 5 või 10, siis on järgnevas võrdluses kasutatud keskmist lahendatuse protsenti, st mitu protsenti moodustab ülesande keskmine tulemus võimalikust maksimumist. Eksamitööde hindamisel tehti vahet lahendamata jäetud ülesannetel ja täiesti valesti lahendatud ülesannetel. Viimasel juhul sai lahendaja 0 punkti, lahendamata jäetud ülesanne aga tähistati tulemuste tabelis kriipsuga ja eksamitulemuse arvutamisel võrdsustati see 0 punktiga. Tabelist



7 on näha, et ülesanded olid eksaminandide jaoks erineva raskusega (keskmise lahendatuse protsent asub vahemikus 17,1% kuni 56,3%). Üle 50% küünib lahendatus vaid kahel I osa ülesandel. Tabeli 7 neljanda veeru arvud näitavad, kui suurel osal eksaminandidest oli vastav ülesanne täiesti lahendamata (märgitud kriipsuga). Kui ülesandel oli mitu alaülesannet, siis on ka need siin eraldi arvesse võetud. On näha, et I osas on vastamata jätmisi oluliselt vähem kui II osas, kus iga ülesande korral on mittevastanuid umbes üks kolmandik. Esimesest osast jäi paljudel eksaminandidel lahendamata ülesanne I-4 (trigonomeetria).

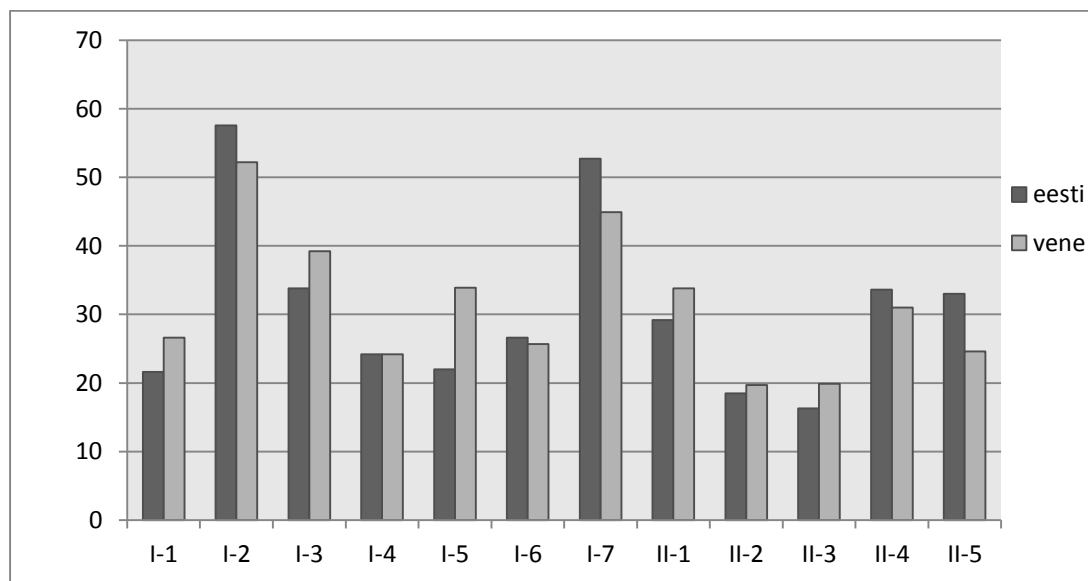
Paremini lahendatud ülesannete kolmandik oli I-2, I-7, I-3 ja II-4 ja halvemini lahendatud kolmandik oli II-3, II-2, I-1 ja I-4. Paremini lahendatud ülesannete hulgas oli kaks elulist rakendusülesannet ning kaks küllaltki tavapärasest ülesannet funktsioonide ja algebra vallast. Halvemini lahendati võrrandisüsteemi koostamise, joone võrrandi, irratsionaalavaldisel lihtsustamise ja trigonomeetria ülesandeid. Viimased on kõik X klassi teemad ja ilmselt ei korratud neid piisavalt.

Tabel 7. Üksikülesannete tulemused soo ja soorituskeele järgi

| Ülesande nr, teema                 | Klass | Lahendatus (%) | Vastamata (%) | Mehed (%)    | Naised (%)   | Eesti (%)    | Vene (%)     |
|------------------------------------|-------|----------------|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| I-1 juured, astmed                 | X     | 22,8           | 8,0           | 20,4*        | <b>24,2*</b> | 21,6*        | <b>26,6*</b> |
| I-2 tõenäosus                      | XI    | 56,3           | 11,1          | 56,4         | 56,2         | <b>57,6*</b> | 52,2*        |
| I-3 ruutvõrratus                   | X     | 35,0           | 8,8           | 32,8*        | <b>36,4*</b> | 33,8*        | <b>39,2*</b> |
| I-4 trigonomeetriline funktsioon   | X-XI  | 24,3           | 30,9          | 23,2         | 25,0         | 24,2         | 24,2         |
| I-5 eksponent- ja logaritmivõrrand | XI    | 25,4           | 21,2          | 20,2*        | <b>28,6*</b> | 22,9*        | <b>33,9*</b> |
| I-6 kolmnurga lahendamine          | X     | 26,4           | 8,8           | 23,6*        | <b>28,0*</b> | 26,6         | 25,7         |
| I-7 jadad                          | XI    | 51,0           | 5,8           | <b>58,9*</b> | 46,2*        | <b>52,7*</b> | 44,9*        |
| II-1 funktsiooni uurimine          | XI    | 30,3           | 31,3          | 25,9*        | <b>32,9*</b> | 29,2*        | <b>33,8*</b> |
| II-2 ringjoone ja sirge võrrand    | X     | 18,8           | 41,9          | 15,1*        | <b>21,0*</b> | 18,5         | 19,7         |
| II-3 võrrandisüsteemi koostamine   | X     | 17,1           | 35,8          | <b>20,2*</b> | 15,3*        | 16,3*        | <b>19,9*</b> |
| II-4 integraal                     | XII   | 33,0           | 27,8          | 27,1*        | <b>36,5*</b> | <b>33,6*</b> | 31,0*        |
| II-5 püstprisma                    | XII   | 31,1           | 34,9          | 31,5         | 30,8         | <b>33,0*</b> | 24,6*        |

Meeste ja naiste keskmised tulemused erinesid teineteisest oluliselt 9 ülesande korral (tabelis 7 on need tähistatud tärniga (\*)). Enamikul juhtudel oli naiste keskmine tulemus kõrgem. Meeste keskmine tulemus oli naiste keskmisest tulemusest oluliselt kõrgem ülesannete I-7, II-3 ja mitteoluliselt ka II-5 korral. Kõik need ülesanded kuuluvad nn eluliste ülesannete valdkonda ja nõuavad matemaatilise mudeli koostamist.

Ka soorituskeele järgi erinevad keskmised tulemused 9 ülesande korral. Samas terviktöö keskmised tulemused, aga ka I ja II osa keskmised tulemused eesti ja vene soorituskeelega eksaminandidel oluliselt ei erine. Põhjus oli selles, et erinevused keskmistes tulemustes ei ole ühesuunalised. Nelja ülesannet lahendasid paremini eesti ja viit ülesannet vene soorituskeelega eksaminandid (joonis 2). Viimased tulid paremini toime algebra teemadega, eesti õppekeelega eksaminandid aga tõenäosuse, integraali, jadade ja stereomeetria valdkonna teemadega. Tõenäosuse ja juhuslikkuse valdkonna tundmise madalam tase vene soorituskeelega õpilaste puhul on ilmnenud ka mitmetes PISA uuringutes. Suurimad erinevused keskmistes tulemustes olid aga eesti ja vene soorituskeelega eksaminandidel eksponent- ja logaritmivõrrandi ning stereomeetria ülesande lahendusoskuses.



Joonis 2. Ülesannete tulemused soorituskeele järgi

Järgnevalt on detailsemalt analüüsitud üksikülesannete tulemusi. Selleks on vaadeldud üldisi keskmisi ja hindamisjuhendit ning analüüsi koostaja on lisanud tähelepanekuid, mis on tehtud 277 eksaminandi (juhuvalik) eksamitöö vaatluse põhjal.

**Ülesanne I-1** (5 punkti) . Lihtsustage avaldis  $\frac{\sqrt{k}}{k-\sqrt{k}} - \frac{2}{k-1}$  ja arvutage kirjalikult selle täpne väärtus, kui  $k = \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$ .

Ülesanne kuulub kitsa matemaatika I kursusesse *Arvuhulgad. Avaldised. Võrrandid ja võrratused*.

Eksaminand pidi oskama leida negatiivse murrulise astendajaga astet, oskama teisendada irratsionaalavaldisi, sooritama tehteid algebraliste murdudega, leidma ruutjuurt ja kasutama ruutude vahe valemit. Väga oluline oli siin lihtsaima lahendustee valik.

Ülesande keskmine lahendatus oli väga madal (22,8%). Samas olid peaaegu kõik eksaminandid (92%) vähemalt proovinud seda ülesannet lahendada. Hästi osati leida murdude ühist nimetajat ja vastavaid laiendajaid. Negatiivse astendajaga astme arvutamisel oli eksimusi vähe. Lahendusi uurides jäi silma, et lihtsaima ja nn traditsioonilise lahenduse peale (st kõigepealt mõlema nimetaja tegurdamine seost  $k = (\sqrt{k})^2$  kasutades) tulid üsna vähesed. Ilmselt ei olnud see lahendustee kitsa matemaatika kursuse läbinutele tuttav. Suur osa eksaminandidest valis ühiseks nimetajaks antud nimetajate korrutise. Sel juhul tekkis aga lugejasse kolmliige  $k\sqrt{k} + \sqrt{k} - 2k$ , mille tegurdamine oli keerukas ja seda ei üritatudki teha. Edasi tuli  $k$  väärtuse asendamisel keerukasse avaldisse teha päris palju tööd ja sellega kaasnes ka palju vigu. Kui jõutigi õige väärtuseni, saadi hindamisjuhendi kohaselt selle eest kokku vaid 2 punkti. Nähes, et avaldis muutub ühisele nimetajale viies keerukamaks, asendasid paljud  $k$  väärtuse otse esialgsesse avaldisse, kuid sel juhul kaotati 4 punkti, st saadi õige tulemuse korral arvutamise eest vaid 1 punkt. Paljud eksaminandid kirjutasid kohe algul  $\sqrt{k}$  asemele  $k^{0,5}$ , kuid ka see idee ei viinud edasi. Mitmed eksaminandid üritasid ülesande lihtsustamiseks  $\sqrt{k}$  tähistada uue muutujaga ja nii jõuda ratsionaalavaldiseni.

Ülesande lahendamisel tehtud põhilised vead:

- taandati lugejas (või nimetajas) olevaid liidetavaid;
- sulgude avamisel avaldises  $\sqrt{k}(k-1)$  saadi esimese liikme  $k\sqrt{k}$  asemel kas  $\sqrt{k}$ ,  $k$ ,  $\sqrt{k^2}$ ,  $2k\sqrt{k}$  vms; eksisid peamiselt need, kes ei kirjutanud laiendaja ja lugeja korrutist sulgude abil, vaid asusid kohe korrutama;
- $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{16}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = 256$ ;
- $\sqrt{16} = \pm 4$ .

Kokkuvõttes osutus see ülesanne kitsa matemaatika eksaminandidele ebasobivaks, seda nii madala lahendatuse kui ka madala eristusindeksi<sup>1</sup> (0,24) tõttu. Kitsa matemaatika ainekava kohaselt on irratsionaalavaldiste teisendamine väga põgusalt käsitletav teema. Järgnevatel eksamitel võiks samalaadset ülesannet vältida. Selle ühisosa ülesande puhul oli selgelt näha väga suur erinevus kitsa ja laia matemaatika eksami sooritajate oskustes (joonis 1).

**Ülesanne I-2 (5 punkti).** *Poes on müügil melonid kolmest riigist – Hispaaniast, Kreekast ja Marokost. Melonid ei erine väliselt, küll aga erinevad maitse poolest. Müügisaaali letil on 5 Hispaanias, 7 Kreekas ja 3 Marokos kasvatatud melonit. Leidke tõenäosus, et 1) üks juhuslikult valitud melon on kasvatatud Marokos; 2) üks juhuslikult kasvatatud melon ei ole pärit Hispaaniast; 3) kaks juhuslikult valitud melonit on mõlemad kasvatatud Kreekas.*

Ülesanne kuulub kitsa matemaatika IV kursusesse *Tõenäosus ja statistika*.

Lahendamiseks pidid eksaminandid tundma tõenäosuse mõistet, kombinatsioonide arvutamise, vastandsündmuse tõenäosuse arvutamise või tõenäosuste liitmise reeglit, tõenäosuste korrutamise reeglit ja rakendama suhteliselt lihtsaid matemaatilisi mudeleid. Ülesanne osutus kõige paremini lahendatud ülesandeks (lahendus 56,3%), lahendamata jätmisi oli ainult 11,1%, enim 3. alaülesande korral. Oli ka neid töid, kus lahendus piirdus vaid kõigi melonite summa leidmisega. Ootuspäraselt lahendati kahte esimest (lihtsamat) alaülesannet paremini (lahendatused vastavalt 73,0% ja 65,5%), raskusi valmistas kolmas alaülesanne (lahendus 38,8%). Meeste ja naiste keskmised tulemused teineteisest oluliselt ei erinenud, kuid eesti soorituskeelega eksaminandide keskmine tulemus oli oluliselt kõrgem kui vene soorituskeelega eksaminandidel.

Peaaegu kõik lahendajad teadsid tõenäosuse mõistet. Siiski leidsid üksikuid töid, kus tõenäosus oli suurem kui 1 (aeti segamini soodsate võimaluste arvuga). Paljud eksaminandid esitasid vastuses tõenäosuse isegi kolmel erineval kujul: hariliku murru, kümnendmurru ja protsendina. Kombinatsioonide valemi kasutamisel eksiti vähe, aga seda kasutati juba (lihtsa) 1. alaülesande juures:  $p = C_3^1 : C_{15}^1$ . Teise alaülesande lahendamisel kasutati rohkem sündmuste summa tõenäosust ja vaid mõnevõrra vähem vastandsündmuse tõenäosust. Kolmanda alaülesande korral oli tüüpiline, et piirduti kõigi võimaluste arvutamisega, kuid ei osatud leida soodsate võimaluste arvu (st ei osatud leida lahenduseni viivat mudelit). Selle alaülesande juures tuli esile erisus eesti- ja venekeelsete tööde vahel. Viimastes oli vastus leitud klassikalisele

---

<sup>1</sup> Eristusindeks näitab, mil määral ülesanne diferentseerib erineva tasemega eksaminande. Eristusindeksi väärtused asuvad lõigul -1st kuni 1ni ja hea eristusvõimega ülesande korral peaks indeksi väärtus olema suurem kui 0,3.

tõenäosuse definitsioonile tuginedes:  $p = C_7^2 : C_{15}^2$ , eestikeelsetes töödes peaaegu võrdselt kas eeltoodud viisil või tõenäosuste korrutamise reeglit kasutades:  $\frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14}$ . Viimast lahendust esines vaid mõnes venekeelses töös.

Ülesande lahendamisel tehtud sagedasemad vead:

- arvutusvead, nagu  $\frac{3}{15} = 5$ ;  $\frac{10}{15} = 0,5$ ;
- 1. alaülesandes vastuseks  $1/15$ ;
- 2. alaülesande teksti loeti pealiskaudselt ja leiti hoopis Hispaaniast pärit meloni võtmise tõenäosus;
- 3. alaülesandes vastuseks tõenäosus  $\frac{7}{15} \cdot \frac{7}{15}$ ,  $2 \cdot \frac{7}{15}$ ,  $\frac{7}{15} \cdot \frac{6}{15}$  või  $\frac{7}{15} + \frac{6}{14}$ .

Kokkuvõttes oli see jõukohane ja kõrgeima eristusvõimega (0,66) rakendusülesanne, mille lahendamiseks oli võimalik kasutada erinevaid lahedusi.

**Ülesanne I-3** (5 punkti). *On antud funktsioon  $f(x) = -4x^2 - 3x + 7$ . Leidke kõik argumendi  $x$  väärtused, mille korral funktsiooni  $f(x)$  väärtused on suuremad arvust 6.*

Ülesanne kuulub kitsa matemaatika I kursusesse *Arvuhulgad. Avaldised. Võrrandid ja võrratused*.

Lahendamiseks vajaminevad teadmised ja oskused olid võrratuse koostamine, taandamata ruutvõrrandi lahendamine ja ruutvõrratuse lahendamine.

Ülesannet lahendas 92% kõikidest eksaminandidest ja ülesanne kuulub paremini lahendatud ülesannete hulka (kuigi lahendatus oli vaid 35,0%). Paremini lahendasid ülesannet naised ja vene soorituskeelega eksaminandid. Maksimumpunkte said vähesed. Põhiline raskus selle ülesande puhul seisnes matemaatilise mudeli koostamises. Ülesandeid, kus õpilasel endal tuleb võrratus koostada, ei ole õpikutes eriti palju ja eksaminandid pandi selle ülesandega uudsesse olukorda. Valdavalt saadi ülesande lahenduse eest 3 punkti (koostati vajalik võrratus, leiti saadud ruutkolmliikme nullkohad ja sellega töö lõppes). Paljud jätsid võrratuse koostamata, leidsid esialgse ruutfunktsiooni nullkohad ning kirjutasid vastuseks, et ükski väärtus ei ole 6st suurem. Kuus eksaminandi 277st asusid üksikute arvudega proovima ja leidsid nii üks-kaks sobivat argumendi väärtust. Veel püüti võimalikult täpselt joonestada antud ruutfunktsiooni graafik ja vastus leida selle abil. Osa eksaminandidest ei mõistnud ülesande sisu ja tegutsesid formaalselt (nt 17 eksaminandi leidis funktsiooni tuletise, kordus kirjutis

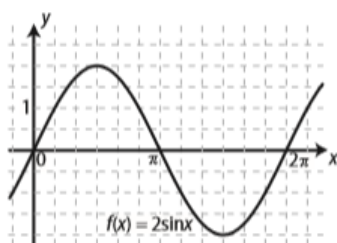
$f(x) = -4x^2 - 3x + 7$ ;  $x = -4x^2 - 3x + 7$ , leiti ruutkolmliikme nullkohad, asendati need seejärel samasse avaldisse ja saadi 0 vms).

Ülesande lahendamisel tehtud põhilised vead:

- eksiti ruutvõrrandi lahendamisel;
- koostati õige võrratus, kuid lahendamisel kanti arvteljele esialgse funktsiooni nullkohad;
- võrratuse poolte korrutamisel  $-1$ ga jäeti võrratuse märk muutmata;
- kanti nullkohad arvteljele ja viirutati piirkonnad analoogselt võrratusesüsteemi lahendamisega.

Kokkuvõttes võib ülesannet siiski pidada sobivaks. Ülesanne eristas ülejäänutest need eksaminandid, kes mõistsid teksti ja oskasid koostada matemaatilist mudelit (eristusindeksi väärtus 0,41). Õpetajatel tuleks ruutvõrratuste õpetamisel rohkem tähelepanu pöörata joonise konstrueerimisele, st skitseerida tuleks kas parabool või intervallmeetodi korral abijoon, aga mitte esitada mingit nende segu.

**Ülesanne I-4** (5 punkti). Joonisel on funktsiooni  $f(x) = 2\sin x$  graafik. 1. Lahendage võrrand  $2\sin x = 1$  lõigul  $[0; 2\pi]$ . 2. Leidke funktsiooni  $f(x) = 2\sin x$  kahanemisvahemik lõigul  $[0; 2\pi]$ .



Ülesanne kuulub kitsa matemaatika II kursusesse *Trigonomeetria* ja V kursusesse *Funktsioonid I*.

Selle ülesande lahendamiseks vajaminevad teadmised ja oskused olid trigonomeetrilise põhivõrrandi lahendamine etteantud lõigul (soovitavalt graafiliselt), kahanemisvahemiku mõiste ja

kahanemisvahemiku leidmine funktsiooni graafiku abil.

See oli üks halvemini lahendatud ülesanne. Paljud eksaminandid (30,9%) ei asunudki ülesannet lahendama, eeskätt 1. alaülesannet. Ka 0-punktiseid (st täiesti valesid) lahendusi oli päris palju (ca 22%). Esimese alaülesande lahendus oli vaid 16,6%. Madal eristusindeks (0,2) näitab, et ühtmoodi halvasti lahendasid seda nii matemaatikas nõrgad kui ka tugevad õpilased. Teist alaülesannet lahendati mõnevõrra paremini (lahendus 35,8%). Olulisi erinevusi polnud tulemustes ei soo ega soorituskeele lõikes.

Kognitiivse taseme poolest oli antud ülesanne suhteliselt tavapärane, sest sedalaadi ülesandeid on õpikutes mitmeid. Mõlema alaülesande vastused olid joonise abil kergesti leitavad. Eeldati,

et 1. alaülesande vastuses joonestatakse ka sirge  $y=1$  ja vastus loetakse jooniselt. Millegipärast tegid seda üsna vähesed. Analüüsitud töödes oli nimetatud sirge joonestanud vaid 8% eksaminandidest ja nendestki kõik ei kasutanud seda vastuse leidmisel. Üldjuhul lahendati võrrand algebraliselt, st kirjutati välja üldlahend ja sealt edasi nõutud lõigul asuvad lahendid. Seejuures tehti erinevaid vigu kas vormistamisel (nt  $\sin \frac{1}{2} = (-1)^n \arcsin 0,5 + n\pi$ ,  $\sin \frac{1}{2} = 30^\circ$ ), vastavate nurkade suuruste arvutamisel  $n$  järgi või sobivate nurkade väljaeraldamisel. Äramärkimist väärib järgmine lahendus:  $2 \sin x = 1$ ,  $\sin x = 1 - 2$ ,  $\sin = \frac{-1}{x}$ .

Ülesande lahendamisel tehtud põhilised vead:

- esimeses alaülesandes esitati vastuses lahendeid, mis ei kuulunud antud lõiku;
- ei teatud, mis on kahanemisvahemik ja selle asemel esitati negatiivsuspiirkond  $(\pi; 2\pi)$ , paaril juhul ka muutumispiirkond kujul  $(2; -2)$ ;
- teksti loeti pealiskaudselt ja kahanemisvahemiku asemel kirjutati (NB! õigesti) kasvamisvahemik;
- esines vigu jooniselt radiaanides antud nurkade lugemisel.

Kokkuvõttes võib öelda, et eksaminandid ise tegid suhteliselt lihtsa ülesande enda jaoks keeruliseks, eeskätt 1. alaülesande. Funktsiooni uurimist graafiku abil käsitletakse ainekava kohaselt lisaks X klassile veel ka XI klassis ja see oluline oskus peaks kitsa matemaatika kursuse õppijatel välja kujunema. Lahendustee valik oluks eksaminandidele lihtsam, kui ülesande tekstis oleks nõutud graafilist lahendamist.

### **Ülesanne I-5** (10 punkti). *Lahendage võrrandid*

$$1) 16^{x-3} = \sqrt{2}, \quad 2) \log_2(x+8) + \log_2 5 = 2 \log_2(2-x).$$

Ülesanne kuulub kitsa matemaatika V kursusesse *Funktsioonid I*.

Lahendamiseks pidid eksaminandid teadma astmete võrdsuse tingimust, oskama sooritada tehteid astmetega, tundma logaritmide omadusi, eksponent- ja logaritmivõrrandi lahendamise meetodeid, samuti oskama lahendada lineaar- ja ruutvõrrandit ning oskama valida sobiva lahendusmeetodi.

Lahendatuse (25,4%) järgi kuulus ülesanne keskmisse kolmandikku. Kahe alaülesande lõikes oli lahendamata ülesannete osakaal kokku 21,2%. Analüüsitud tööde põhjal tundub, et ka 0-punktiste lahenduste osakaal oli ligikaudu sama. Teine alaülesanne osutus oluliselt raskemaks kui esimene (lahendatused vastavalt 36,9% ja 17,8%), seda nii tugevate kui ka nõrkade õpilaste

jaoks (eristusindeks 0,06). Vene soorituskeelega eksaminandide tulemus oli tunduvalt parem kui eesti soorituskeelega eksaminandidel, naiste tulemused olid paremad meeste tulemustest. Kuna lahendamisel tuli rakendada mitmeid erinevaid astendamise ja logaritmimise reegleid, oli ka palju võimalusi vigade tekkeks. Reegleid aeti segamini ja esitati hulgaliselt „oma valemeid”. Vigade amplituud oli väga lai, eriti logaritmivõrrandi lahendamise puhul. Tehti ka selliseid vigu, mida esines enam kui 25 analüüsitud töös. Näiteks logaritmivõrrandi lahendamisel jäeti lihtsalt ära sümbol  $\log_2$  ja saadi võrrand  $(x + 8) + 5 = 2(2 - x)$ . See näitab, et logaritmi mõiste ja/või logaritmifunktsiooni omadused ei ole sisuliselt omandatud. Teine sage viga oli see, et logaritmivõrrandi lahendeid ei kontrollitud. Analüüsitud töödes tuli ilmsiks järgmine sage viga: arvu 12 asendamisel lähtevõrrandisse laiendati selle määramispiirkonda:  $2\log_2(2 - 12) = 2\log_2(-10) = \log_2(-10)^2 = \log_2 100$  ja nii loeti ka võõrlahend 12 lahendite hulka. Venekeelsetes töödes kõrvaldati võõrlahend paljudel juhtudel võrrandi määramispiirkonna leidmise kaudu, kuid määramispiirkonda kuuluv lahend  $-3$  loeti ilma kontrolli ja kommentaarideta sobivaks.

Ülesande lahendamisel tehtud sagedasemad vead:

- astme astendamisel astendajad liideti;
- eksponentvõrrandis võrdsustati astendajad, kuigi astme alused olid erinevad;
- logaritmidest vabaneti nii:  $\log_2(x + 8) = 2^{x+8}$ .

Kokkuvõttes oli esimene alaülesanne tegijatele igati jõukohane. Teise alaülesande korral tuli ilmsiks logaritmi omaduste ja logaritmivõrrandi lahendusmeetodite kehv tundmine. Kitsa matemaatika ainekava kohaselt peaks õpilane lahendama lihtsamaid eksponent- ja logaritmivõrrandeid astme ning logaritmi definitsiooni vahetu rakendamise teel. Võib-olla ületas teine alaülesanne seda piiri. Õpetamisel tuleks rohkem tähelepanu pöörata logaritmivõrrandi lahendite kontrollile ja sellele, et võõrlahendi tekke võimalusega võrrandite korral on vajalik ülesande lõppu kirjutada korrektne vastus.

**Ülesanne I-6** (10 punkti). *Metsaäärne peenramaa on täisnurkse trapetsi kujuline. Penramaa tahetakse metsloomade eest kaitsta võrguga. Trapetsikujulise peenramaa lühem diagonaal on 10 m, pikem haar 6 m ja nendevaheline nurk  $120^\circ$ . Mitu meetrit võrku kulub peenramaa piiramiseks? Lõppvastus esitage täpsusega 1 meeter.*

Ülesanne kuulub kitsa matemaatika II kursusesse *Trigonomeetria*.



Eksaminandid pidid oskama skitseerida täisnurkset trapetsit, oskama kanda tekstis olevad andmed joonisele, tundma trapetsi elemente ja omadusi, oskama lahendada suvalist kolmnurka (koosinusteoreem, siinusteoreem) ja täisnurkset kolmnurka, ümardada arvu etteantud täpsuseni ja oskama ülesandes esitatud küsimusele vastamiseks valida sobiva mitmeetapilise matemaatilise mudeli.

Keskmise lahendatuse (26,4%) poolest kuulus ülesanne keskmisesse kolmandikku ja lahendamata jätnute protsent oli vaid 8,8%. Ka 0-punktiseid töid oli suhteliselt vähe. Soorituskeele järgi tulemused ei erinenud, naised said aga oluliselt parema tulemuse kui mehed.

Enamik eksaminandidest oskas teha õige joonise, kuid andmete kandmisel joonisele esines juba rohkem eksimusi. Enamikule eksaminandidest oli selge, et lahenduse lõppeesmärk on leida trapetsi ümbermõõt. Selle ülesande puhul tuli ilmsiks kaks sagedasemat lahendust: piirduti vaid andmete märkimisega joonisele (saadi 2 punkti) või lisaks eelnevale arvutati koosinusteoreemi abil trapetsi pikem alus (kokku 4 punkti). Trapetsi kahe ülejäänud külje pikkuse leidmisel tehti erinevaid vigu, ka lahendusteid oli siin erinevaid (kõige sagedamini siinusteoreemi kasutamine, millele järgnesid erinevad lahendusideed pindalade kaudu). Lahenduse eest sai maksimumpunkte umbes viiendik eksaminandidest.

Ülesande lahendamisel tehtud sagedasemad vead:

- eeldati, et trapetsi diagonaal poolitab trapetsi nurga;
- koosinusteoreemi vale üldkuju (koosinust sisaldava liikme ees oli plussmärk või puudus sealt kordaja 2);
- täisnurkse trapetsi asemel joonistati rööpkülik või suvaline trapets;
- arvati, et  $120^\circ$ -se nurga juures on trapetsi nurga ülejäänud osa  $60^\circ$ ;
- Pythagorase teoreemi rakendati mistahes kolmnurgas.

Kokkuvõttes vastas ülesanne ainekavale (*õpilane lahendab kolmnurka ja lihtsamaid rakendussisuga planimeetriaülesandeid*). Ülesandest mingigi osa lahendamine oli paljudele eksaminandidele jõukohane. Õpetamisel võiks õpilasi rohkem suunata saadud vastuseid kriitiliselt hindama (st kas saadud andmetega kolmnurka üldse eksisteerib, kas trapetsi lühem haar saab olla pikem kui 6 cm jne) ja kasutama oma lahenduses joonisel olevaid tähiseid.

**Ülesanne I-7** (10 punkti). *1. Oksjonil müüdi maali alghinnaga 150 eurot. Nii esimene kui ka iga järgmine hinnapakkuja suurendas panust ühe ja sama summa võrra. On teada, et kümnes pakkumine oli 900 eurot ja maali ostis kolmekümnenda pakkumise teinud osaleja. Mis hinnaga*

osteti maal? 2. Samal oksjonil müüdi ka antiikese, mille väärtus oli 10000 eurot. Palju maksab antiikese 4 aasta pärast, kui selle väärtus kasvab 20% aastas?

Ülesanne kuulub kitsa matemaatika VI kursusesse *Funktsioonid II*.

Rakendusliku sisuga ülesande lahendamisel tuli kõigepealt mõista teksti ja valida lahendamiseks sobiv matemaatiline mudel, tunda aritmeetilise ja geomeetrilise jada omadusi ning üldliikme valemeid, lahendada lineaarvõrrandit. Ülesannet võis lahendada ka jadasid kasutamata. Sel juhul oli vaja loogilist arutelu, kasutada protsentarvutust või liitprotsendilise kasvamise valemit.

Ülesanne kuulus kahe kõrgema lahendatusega ülesande hulka (lahendatus 51,0%), kusjuures vastamata jätnute osakaal oli kõige väiksem (5,8%) ja 0-punktiseid töid oli võrreldes teiste ülesannetega suhteliselt vähe. See oli ka ainus ülesanne, mille puhul gümnaasiumi päevase õppe tulemus (53,1%) jäi mõnevõrra madalamaks kutseõppe õppurite ja varem lõpetanute tulemustest (53,8% ja 58,4%). Antud ülesande kõrge lahendatuse üks põhjus ongi see, et kõigi õppevormide eksaminandid lahendasid ülesannet suhteliselt hästi. Seda ülesannet lahendasid oluliselt paremini mehed ja eesti soorituskeelega eksaminandid. Teist alaülesannet lahendati oluliselt paremini kui esimest (lahendatused vastavalt 43,4% ja 58,5%).

Mõlema alaülesande lahendustes esines tüüpviga. Esimeses alaülesandes ei arvestatud, et kui aritmeetilise jada esimene liige oli 150, siis ülesande tekstis toodud kümnes pakkumine oli juba aritmeetilise jada 11. liige ja otsitav 30. pakkumine oli aritmeetilise jada 31. liige. Teise alaülesande korral lahendati ülesannet lihtprotsendilise kasvamise abil, st leiti alghinnast 20% ja liideti selle neljakordne alghinnale (analüüsitud töödes tegi nii 18%). Analüüsitud töödes oli enamik eksaminandidest lahendanud teise alaülesande siiski liitprotsendilise kasvamise valemiga, umbes viiendik eksaminandidest järjestikku 20% lisades ja vaid 7 eksaminandi kasutas geomeetrilise jada üldliikme valemit.

Ülesande lahendamisel tehtud sagedasemad vead:

- esimeses alaülesandes leiti vastus mitte üldliikme valemi, vaid summa valemi abil;
- vead aritmeetilise jada üldliikme valemis ja liitprotsendilise kasvamise valemis;
- esimeses alaülesandes ebakõla jada liikme indeksi ja vastava üldliikme leidmise vahel;
- teises alaülesandes järjestikku 20% lisades lõpetati kolmanda aastaga.

Kokkuvõttes oli see ülesanne sobiv kõikide õppevormide eksaminandidele. Mõlema alaülesande lahendamisel oli erinevate lahendusteede võimalus, seetõttu näitas ülesanne ka lahendajate üldist arutlus- ja põhjendamisoskuse taset. Esimene alaülesanne osutuski paremini

lahendatuks nendel, kes ei valinud mudeliks aritmeetilist jada, vaid lahendasid aritmeetiliselt. Mõnedes töödes võinuks eksaminandid arvutustele lisada rohkem selgitusi.

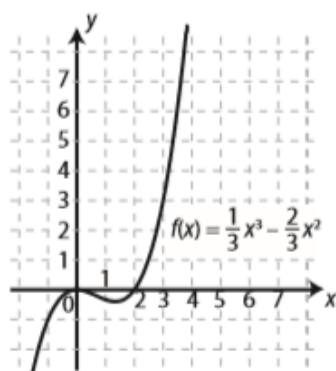
**Ülesanne II-1** (10 punkti). On antud funktsiooni  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2$  graafik (vt joonist.

1. Leidke funktsiooni  $f(x)$  nullkohad ja positiivsuspiirkond.
2. Arvutage funktsiooni  $f(x)$  miinimumpunkti koordinaadid.
3. Arvutage kõikide selliste punktide koordinaadid, mille korral kehtib võrdus  $f'(x) = x$ .

Ülesanne kuulub kitsa matemaatika kursustesse *Funktsioonid I* ja *Funktsioonid II*.

Selle ülesande lahendamiseks tuli eksaminandidel osata uurida funktsiooni nii graafiku abil kui ka algebraliselt. Oli vaja tunda nullkoha, positiivsuspiirkonna ja ekstreemumpunkti mõisteid ning osata neid leida. Samuti läks vaja astmefunktsiooni diferentseerimise, mittetäieliku ruutvõrrandi lahendamise ja harilike murdudega arvutamise oskust.

Tulemuse järgi kuulub ülesanne keskmisesse kolmandikku (lahendus 30,3%). Siiski oli kõigi alaülesannete peale kokku osaliselt või täielikult lahendamata töid 31%. Peamiselt oli lahendamata just viimane alaülesanne (lahendamata 60%). 0-punktiste tööde ja maksimumtulemusega tööde hulk oli enam-vähem võrdne (7-8%). Seega, kes lahendama asus, see mingit osa ülesandest ka lahendada oskas (eeskätt siiski esimest alaülesannet). Kahes esimeses alaülesandes oli tegemist eksaminandide jaoks tuttava situatsiooniga. Esimeses alaülesandes tuli graafikult lugeda funktsiooni nullkohad ja positiivsuspiirkond, teises



alaülesandes tuli tuletise abil leida ekstreemumkohad ja miinimumpunkti koordinaadid. Kolmas alaülesanne oli kognitiivselt keerukam ja eksaminandidel tuli ise koostada nõutav võrrand ning see lahendada. Raskusaste kajastus ka tulemustes (lahendatused vastavalt 64,2%, 34,4% ja 14,2%). Kolmanda alaülesande madal eristusindeks 0,15 viitab sellele, et ülesanne oli ühtmoodi raske nii nõrgematele kui ka tugevamatele. Meeste keskmine tulemus oli oluliselt madalam

naiste keskmisest tulemusest ning vene soorituskeelega eksaminandid lahendasid ülesannet oluliselt paremini kui eesti soorituskeelega eksaminandid.

Ülesanne oli eksami II osa esimene ülesanne. Eksamitöid analüüsid tekkis tunne, et pärast vaheaega oli eksaminandidega midagi juhtunud. I osaga võrreldes oli lahendustes oluliselt rohkem arvutus- ja hooletusvigu. Ka ülesannete tekste ei loetud enam hoolikalt. Näiteks selle ülesande 1. alaülesandes leiti nullkohad, aga positiivsuspiirkond jäeti märkimata. Palju

elementaarseid eksimusi esines võrrandite lahendamisel. Selle ülesande lahendusi analüüsid ilmnes, et väga paljudes töödes esines sama puudus: eksaminandid ei osanud funktsiooni uurimiseks valida selle esitusviisile sobivat taktikat. Eksami koostajad ilmselt eeldasid, et 1. alaülesandele leitakse vastused ülesande tekstile lisatud graafikult. Paraku kulutas valdav osa eksaminandidest palju energiat kuupvõrrandi ja -võrratuse lahendamisele (mis aga ei kuulu ainekava järgi kitsa matemaatika kursuse õppesisusse). Seejuures tehti palju vigu, mida ei taibatud ka graafikuga võrdlemise abil kõrvaldada.

Ülesande lahendamisel tehtud sagedasemad vead:

- eksimused sümboolika kasutamisel, nt  $x_0 = (0; 2)$ ,  $x^+ \in (2; \infty)$ ,  $X^+ = \{2; \infty\}$ ;
- aeti segamini nullkoha ja nullpunkti mõiste, esimeses alaülesandes esitati nullkohtade asemel nullpunktide koordinaadid ja viimases alaülesandes punkti koordinaatide asemel vaid  $x$  väärtus;
- positiivsuspiirkonna asemel esitati kasvamisvahemik;
- eksiti mittetäieliku ruutvõrrandi lahendamisel (eriti täieliku ruutvõrrandi lahendivalemit kasutades);
- vead tuletise leidmisel ja seda eeskätt arvulistes kordajates (jäeti funktsiooni valemis olevad kordajad üldse kõrvale või eksiti tehetes nendega, nt  $3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \frac{1}{3}$ );
- kolmanda alaülesande lahendamisel koostati vale võrrand  $f'(x) = f(x)$  või  $f(x) = x$ , samuti jäeti otsitava punkti teine koordinaat leidmata. Viimasele võis kaasa aidata see, et eestikeelses tekstis ei olnud rõhutatud, kumma graafiku (funktsiooni või tuletisfunktsiooni) punktide kohta küsimus käib. Venekeelses tekstis oli see täpselt fikseeritud.

Kokkuvõttes oli see mitmeid erinevaid ja olulisi oskusi integreeriv ülesanne, seda nii matemaatilises kui ka kognitiivses plaanis. Üleliia palju tuli aga teha tehteid harilike murdudega ja viimases alaülesandes võinuks punkti  $y$ -koordinaadi küsimata jätta. Analoomiliselt ülesandega I-5 tuli esile see, et kui antud on nii funktsiooni graafik kui ka valem, siis eksaminandid ei suuda funktsiooni uurimiseks sobivat võimalust eriti hästi valida. Ainekavas taotletavad pädevused (tõlgendab erinevaid matemaatilise info esituse viise (graafik, tabel, valem, diagramm, tekst), oskab valida sobivat esitusviisi ning üle minna ühelt esitusviisilt teisele ja kirjeldab funktsiooni graafiku järgi funktsiooni peamisi omadusi) vajaksid õpetamisel suuremat tähelepanu.

**Ülesanne II-2** (10 punkti). On antud punktid  $A(-1; 1)$  ja  $B(5; 3)$ . 1. Ringjoone diameeter on lõik  $AB$ . Koostage ringjoone võrrand. 2. Arvutage selle ringjoone pikkus. 3. Koostage lõigu  $AB$  keskristsirge võrrand.

Ülesanne kuulub kitsa matemaatika III kursusesse *Vektor tasandil*. Joone võrrand.

Lahendamiseks oli vaja arvutada lõigu (või vektori) pikkust, leida lõigu keskpunkti koordinaate, diameetri järgi ringi raadiust, koostada ringjoone võrrandit, arvutada ringjoone pikkust, teada seost ristuvate sirgete tõusude vahel ja koostada sirge võrrandit kahe punkti ning tõusu ja punkti järgi. Ülesanne kontrollis peaaegu kogu joone võrrandi temaatikat.

Keskmise tulemuse järgi oli see ülesanne üks halvemini lahendatud ülesandeid (lahendatus 18,8%). Madala lahendatuse üks põhjus oli kindlasti see, et kolme alaülesande peale kokku oli lahendamata jätmisi 41,9% (NB! kõrgeim 12 ülesande seas) ja üksikute alaülesannete lõikes vastavalt 16,2%, 47,6% ja 61,1%. Ligikaudu viiendik eksaminandidest said tulemuseks 0 punkti. Seega esitasid sisukaid lahendusi vähem kui pooled eksaminandidest. Kõige madalam keskmine tulemus (14,1%) oli kolmandal alaülesandel. Soorituskeele lõikes olulisi erinevusi ei olnud, kolmas alaülesanne oli venekeelsetes töödes mõnevõrra paremini lahendatud. Naiste tulemus oli oluliselt parem meeste tulemusest.

Kognitiivselt tasemelt olid ülesande kõik osad suhteliselt lihtsad, teadmisi tuli rakendada tüüpituatsioonides. Muidugi oli vaja läbi mõelda, milliseid suurusi küsimusele vastamiseks eelnevalt leida tuleb. Võimalike lahendusteede hulk oli samuti väike. Suhteliselt hästi osati kanda etteantud punkte koordinaattasandile, leida lõigu  $AB$  pikkust ja ringjoone pikkust. Eksaminandid, kes teemat valdasid, esitasid ka väga hästi vormistatud lahendusi. Ülejäänud kirjutasid küll vajalikke valemeid, kuid sageli ei mõistnud nende sisu. Näiteks ringjoone võrrandis  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  kirjutati  $a$  ja  $b$  asemele mitte ringi keskpunkti koordinaadid, vaid vektori  $\overrightarrow{AB}$  koordinaadid. Eksamitööde põhjal jääb mulje, et eksaminandid olid mingi hulga formaalseid valemeid pähe õppinud, kuid need olid segamini ja omavahel seostamata. Nii esitati ringjoone võrrandiks sirge võrrandit ja vastupidi, võrrandites (eriti ringjoone võrrandis) esines erinevaid vigu. Mitmed eksaminandid olid valemite kirjutamisest ja kasutamisest üldse loobunud, joonestasid vastava ringjoone ja selle diameetri koordinaattasandile ning leidsid jooniselt nii ringi keskpunkti koordinaadid kui ka raadiuse.

Ülesande lahendustes oli suhteliselt palju elementaarseid teisendus- ja arvutusvigu. Näiteks ühes ja samas avaldises korrutati ühes kohas sulgude ees oleva arvuga vaid esimene liidetav ja teises kohas mõlemad liidetavad, võrrandite teisendamisel tehti märgivigu jm.

Ülesande lahendamisel tehtud sagedasemad vead:

- kolmandas alaülesandes koostati sirge  $AB$ , mitte selle keskristsirge võrrand;
- vektori  $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$  põhjal järeldati, et ringi keskpunkti koordinaadid on  $(3; 1)$ ;
- ringjoone pikkust arvutati ringi pindala valemiga;
- võrdusmärgi vale kasutamine, nt  $\sqrt{40} = 6,32$ ;
- vead tehetes erimärgiliste arvudega ja juurtega, nt  $\frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{20}$ .

Selle ülesandega kontrolliti palju erinevaid matemaatikapädevusi ja selgus, et analüütilise geomeetria temaatika oli ühtmoodi halvasti omandatud nii tugevatel kui ka nõrgematel õpilastel (esimese ja kolmanda alaülesande eristusindeks 0,14). Võib-olla oli madala tulemuse üheks põhjuseks ka see, et korraga tuli kasutusele võtta liiga palju erinevaid valemeid. Teine põhjus peitub eksternide, kutseõppe ja õhtuõppe eksaminandide väga madalas tulemuses. Kui analoogilist ülesannet tulevikus kasutada, võiks küsimusi olla vähem.

**Ülesanne II-3** (10 punkti). Väikeses tõlkebüroos töötab 3 inimest: juhataja tõlk ja toimetaja. 1. Kui tõsta tõlgi palka 10% ja toimetaja palka 20% võrra, siis oleks nende palkade summa 1600 eurot. Kui aga tõlgi palka tõsta 20% ja toimetaja palka 10% võrra, siis oleks nende palkade summa 1620 eurot. Arvutage tõlgi ja toimetaja palk. 2. Kõikide töötajate palkade summa on 3000 eurot. Mitu protsenti moodustab juhataja palk tõlgi palgast?

Ülesanne kuulub kitsa matemaatika I kursusesse *Arvuhulgad. Avaldised. Võrrandid ja võrratused*.

Selle ülesande lahendamiseks vajalikke põhiteadmisi peavad õpilased suures osas omandama juba põhikoolis, nt teksti põhjal kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemi koostamine, selle lahendamine, lahendite kontrollimine, protsendi leidmine arvust, kahe arvu suhte väljendamine protsentides ja tehted kümnendmurdude või harilike murdudega. Kümnenda klassi algul seda temaatikat korratakse. Antud ülesanne oli põhikooli omadest mõnevõrra keerukam selles mõttes, et protsentarvutus viidi kokku muutujaid sisaldavate avaldistega ja võrrandisüsteemiga. Ülesanne osutus tegijatele kogu eksamitöö lõikes keerukaimaks, lahendatuse protsent oli 17,1 ja seda mõlema alaülesande puhul. Vastamata jätmisi oli 35,8%, samasse suurusjärku jääb ka 0-punktiste tööde hulk. Kõige kõrgema tulemuse (23,0%) saavutasid varemlõpetanud, neile järgnesid gümnaasiumi päevase õppe lõpetanud 19,5%-ga. Kõigi ülejäänute keskmine oli 8-9% ringis. Seda ülesannet lahendasid oluliselt paremini mehed (keskmised vastavalt 20,2% ja 15,3%), samuti vene soorituskeelega eksaminandid (keskmised 19,9% ja 16,3%).

Null punktist kõrgemaid tulemusi saavutas antud ülesande puhul umbes üks kolmandik eksaminandidest ja neilgi esines erinevaid vigu. Siiski on vigu päris lihtne rühmadesse jagada.

1. alaülesandes oli kõige levinum viga see, et jäädi hätta protsendi leidmisel muutujast ja esitati võrrand kujul  $x + 0,1 + y + 0,2 = 1600$  või  $0,1x + 0,2y = 1600$  või  $x + 10\% + y + 20\% = 1600$ .

Analüüsitud töodes koostas selliseid võrrandeid 12% eksaminandidest ning viimast võrrandi kuju esines kõige rohkem. Kui õige võrrandisüsteem oligi koostatud, tekkis paljudel probleeme edasise lahendusega. Ühed jätsid lahendamise selle koha peal pooleli, teised eksisid lahendamisel tehetes murruliste kordajatega, seda eriti juhul, kui need teisendati harilikeks murdudeks. Kõige mõistlikum olnuks kaks võrrandit liita ja lahutada, mille tulemusena oleks

jõutud süsteemini 
$$\begin{cases} x + y = 1699 \\ x - y = 200 \end{cases}$$
 ja selle lahendamine (liitmisvõttega) oleks olnud juba päris

lihtne. Kahjuks kasutas seda varianti vaid viis eksaminandi. Viimane tüüpiline eksimus puudutab neid eksaminande, kes said esimesele alaülesandele õiged vastused, kuid jätsid need teksti põhjal kontrollimata ja kaotasid seetõttu 1 punkti (11% eksaminandidest).

Teise alaülesande korral võttis 7% eksaminandidest 100%-ks mitte tõlgi, vaid juhataja palga.

Ülesande lahendamisel tehtud sagedasemad vead:

- võrrandisüsteemi lahendamisel murdarvude jagamise tulemused ümardati ja saadi ligikaudsed vastused;
- kasutatud muutujate tähised jäeti selgitamata või anti mittepiisav selgitus, nt  $x$  – tõlk,  $y$  – toimetaja;
- esimest alaülesannet lahendati aritmeetiliselt, seejuures liideti erinevatest tervikutest võetud protsendid, edasi jagati 1600-st allesjääv 70% kahega, nii saadi tõlgi ja toimetaja esialgsed palgad;
- nii tõlgi kui ka toimetaja palk tähistati ühe ja sama muutujaga  $x$ ;
- teises alaülesandes leiti, mitme protsendi võrra on juhi palk suurem tõlgi palgast;
- puudus kriitiline suhtumine ebareaalsetesse vastustesse, nt juhi palk on 0,5% tõlgi palgast või tõlgi ja toimetaja palgad on vastavalt 51 eurot ja 9680 eurot.

Kokkuvõttes võib tulemust arvestades pidada seda ülesannet kitsa matemaatika eksami teinud eksaminandide jaoks väga raskeks. Põhjusi võib olla erinevaid – põhikoolis omandatud teemasid oli vähe korratud, liiga keeruline võrrandisüsteem, mis tõi lahendamisel kaasa arvutusvigu, teisele alaülesande küsimusele ei olnud võimalik vastata, kui esimene alaülesanne lahendamata jäi. Esimese alaülesande madal eristusindeks 0,17 näitas, et ülesanne ei eristanud eksaminande eriti hästi.

**Ülesanne II-4** (10 punkti). *Kõvertrapetsit piiravad jooned  $y = x^2 - 2x + 5$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$  ja  $x$ -telg.* 1. Joonistage kõvertrapets koordinaatteljestikku. 2. Arvutage kõvertrapetsi pindala.

Ülesanne kuulus eeskätt kitsa matemaatika VII kursusesse *Tasandilised kujundid. Integraal*, kuid sisaldas ka III kursuse teemasid *Vektor tasandil. Joone võrrand*.

Tegemist oli tavapärase rakendusülesandega, mille lahendamiseks oli vaja teada kõvertrapetsi mõistet, osata etteantud võrrandite järgi joonestada parabooli ja sirgeid, koostada pindala leidmiseks sobivat funktsiooni valemit, leida määratud integraali rajasid ja ruutfunktsiooni algfunktsiooni, samuti arvutada määratud integraali.

Keskmise tulemuse järgi oli see üks neljast paremini lahendatud ülesandest (keskmine lahendus 33,0%) ja osutus II osa kõige paremini lahendatud ülesandeks. Lahendamata jätmiste protsent oli 27,8%, kuid see erines kahe alaülesande osas oluliselt: esimesele ei vastanud 11,2%, aga teisele koguni 44,0% eksaminandidest. Ka keskmine lahendus oli esimesel alaülesandel seetõttu oluliselt kõrgem kui teisel (keskmised vastavalt 45,9% ja 24,4%). Põhjus oli ilmselt selles, et esimeses alaülesandes oli tegemist põhikoolis ja ka gümnaasiumis mitmeid kordi korratud funktsioonide graafikute joonestamisega, kuid teises alaülesandes XII klassis õpitud temaatikaga. 0-punktiste tööde hulk oli suhteliselt väike, maksimumpunktidega hinnatud lahendusi oli umbes viiendik. Meestele osutus ülesanne oluliselt keerukamaks kui naistele (keskmised tulemused vastavalt 27,1% ja 36,5%), eesti soorituskeelega eksaminandide tulemus ületas vene soorituskeelega eksaminandide tulemust (keskmised tulemused vastavalt 33,6% ja 31,0%).

Kõige paremini osati joonestada sirgeid  $x = -1$  ja  $x = 2$ . 12,5% analüüsitud töödest sisaldas lahendust, milles kõvertrapetsi kõik küljed olid sirglõigud (võrranditest arvutati nimetatud sirgete lõikepunktid parabooliga ja need punktid ühendati omavahel sirglõiguga). Tekkinud trapetsi pindala leiti põhikoolist tuttava trapetsi pindala valemiga või ristküliku ja kolmnurga pindala summana. Seega üle poole eksaminandidest ei osanud leida kõvertrapetsi pindala integraali abil (eelmises, 2002. a ainekavas integraali ei olnud).

Ülesande lahendamisel tehtud sagedasemad vead:

- arvutusvead määratud integraali arvutamisel, eeskätt märgivead;
- vead parabooli joonestamisel (ca 12%), leidus ka paraboolist erinevaid kõverjooni;
- vead integreerimisel, sagedasem neist  $\int x^2 dx = \frac{2x^3}{3} + C$  ja arvust 5 integraali leidmine;
- vead sümboolikas: puudus sümbol  $dx$  või oli see alles ka pärast integreerimist;



- integreeritav avaldis või rajad olid valed või jäeti avaldis integreerimata ja rajad asendati parabooli võrrandisse.

Kokkuvõttes oli see sobiv ülesanne, mis sidus omavahel erinevaid teemasid ja võimaldas 1. alaülesande põhjal eksaminande tulemuse järgi eristada. Väga halvasti oli teema omandatud eksternidel ja kutseõppe lõpetanutel (keskmised lahendatused vastavalt 3,4% ja 4,6%).

**Ülesanne II-5** (10 punkti). *Korrapärase kolmnurkse püstprisma kujulisse vaasi valatakse pool liitrit vett. Vaasi kõrgus on 20 cm ja põhiserv on 14 cm. 1. Arvutage veetaseme kõrgus vaasis. 2. Kui suur osa vaasi sisust jääb veega täitmata? NB! Vaasi seinte ja põhja paksust arvutamisel ei arvestata.*

Ülesanne kuulub kitsa matemaatika VIII kursusesse *Stereomeetria*, kuid vajas lahendamisel teadmisi ka VII kursusest *Tasandilised kujundid. Integraal*.

Ülesande lahendamiseks pidid eksaminandid teksti põhjal järeldama, et vastuse leidmiseks on vaja arvutada vaasi ruumala ja põhja pindala. Eksaminandid pidid tundma korrapärase kolmnurkse püstprisma mõistet, põhiserva mõistet, oskama arvutada prisma põhja pindala ja ruumala, teisendada ruumalaühikut liiter kuupsentimeetriteks või kuupdetsimeetriteks. Muidugi oli vaja ka ruumikujutluse võimet.

Tulemuse järgi kuulus ülesanne keskmisse kolmandikku. Selle keskmine lahendus oli 31,1%. Esimest alaülesannet lahendati paremini kui teist (lahendatused vastavalt 32,3% ja 26,1%), kuigi kognitiivselt tasemelt oli teine alaülesanne esimesest lihtsam. Teise alaülesande lahendus puudus täielikult 56,5% eksaminandidest, esimese alaülesande puhul oli selliseid töid vaid 13,0%. Üks põhjus oli ilmselt selles, et teist ülesannet ei saa lahendada, kui esimesele vastus leidmata. Mehed lahendasid seda ülesannet naistest natuke paremini, kuid erinevus pole statistiliselt oluline. Seevastu on oluline erinevus eesti ja vene soorituskeelega eksaminandide tulemustes (eesti soorituskeelega eksaminandide keskmine tulemus oli oluliselt kõrgem kui vene soorituskeelega eksaminandidel).

Paljud eksaminandid lahendasid ülesannet elulise konteksti tõttu ja sageli oli õige lahendusidee ka olemas, st asuti leidma vaasi ruumala. Ligikaudu veerand eksaminandidest esitasid väga korralikult vormistatud ja korrektsed lahendused. Selle ülesande puhul osutus esimeseks komistuskiviks mõiste *korrapärane kolmnurkne püstprisma* mittetundmine. Analüüsitava tööde valimis oli skitseeritud 19 kolmnurkset püramiidi, 10 koonust, üks tüvikoonus, kolm silindrit, üks nelinurkne püramiid ja üks trapets. Järgmine eksimus puudutas pindala ja ruumala valemide. Kui oligi joonestatud õige prisma, kasutati püramiidi ruumala valemit (7%) või muid valesid valemide. Korrapärase kolmnurga pindala arvutamiseks kasutati kaheksat erinevat

valet valemit (nt  $S_p = \frac{3a}{2}$  või  $a\sqrt{3}$  või  $ah$  või  $\frac{a \cdot a}{2}$ ). Põhja pindala leidmiseks kasutati erinevaid võimalusi. Enamik eksaminandidest leidis esmalt Pythagorase teoreemi järgi kolmnurga kõrguse, palju oli ka valemi  $S_p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$  või Heroni valemi ning kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse kaudu arvutamist. Kahjuks jätsid mitmed eksaminandid selle ülesande juurde joonise tegemata. Seetõttu oli ka lahenduskäike raske jälgida. Paljudel puudusid aga vajalikud oskused ruumikujundi skitseerimiseks tasandil. Teise alaülesande sõnastus *Kui suur osa vaasi sisust ...* andis eksaminandidele võimalusi erinevaks tõlgendamiseks: enamik leidis ootuspäraselt osamäära (protsentides või hariliku või kümnendmurruna), kuid rohkem kui viiendik andis vastuse kuupdetsimeetrites. See vastus loeti hindamisel õigeks.

Ülesande lahendamisel tehtud sagedasemad vead:

- vead ruumalaühikute teisendamisel, nt  $0,5 \text{ l} = 0,5 \text{ dm} = 5 \text{ cm}$  või  $0,5 \text{ dm}^3 = 0,125 \text{ dm}$ ;
- tähised lahenduses ja joonisel ei ühtinud;
- teksti pealiskaudne lugemine, nt veega täitmata osa asemel leiti täidetud osa ruumala.

Kokkuvõttes oli ülesanne kitsa matemaatika eksami tegijatele jõukohane. Erinevate õppevormide (v.a gümnaasiumi päevaõpe) eksaminandidel oli see kõige paremini lahendatud II osa ülesanne. Ka mõlema alaülesande eristusindeksi väärtus oli suhteliselt kõrge (0,31 ja 0,53). Õpetamisel tuleks edaspidi õpilasi suunata korrektsemaid jooniseid tegema.

## 6. Kokkuvõtte ja järeldused

Kahetasemeline matemaatika eksam oli Eesti riigile esmakordne kogemus. Gümnaasiumilõpetajatele kohustuslik matemaatika riigieksam oli kõigile uudne. Eksami koostajad olid üsna raskes situatsioonis, sest puudus selge ettekujutus nii kitsa kui ka laia matemaatika eksami valijate hulgast ja tasemest. Kitsa matemaatika eksami kasuks otsustas 49,4% kõigist riigieksami sooritajatest (46,7% kõigist eesti ja 61,3% kõigist vene soorituskeelega eksaminandidest). Kitsa matemaatika eksami tegijatest peaaegu neljandiku (23,6%) moodustasid muude õppevormide (kutseõpe, õhtune õpe, eksternõpe jne) eksaminandid.

Eksamitöö keskmine tulemus oli 30,2 punkti 100st. Tulemuste pingerea eesotsas oli väikese eksaminandide arvuga Saaremaa 40,5 punktiga, Viljandimaa 35,6 punktiga ja Läänemaa 34,5 punktiga. Ka pingerea lõpus olid väiksema eksaminandide arvuga maakonnad. Ilmnes, et maakonna keskmine tulemus on seotud kitsa matemaatika eksami valinute osakaaluga: üldiselt

valis kõrgema tulemusega maakondades suurem osa õppureist kitsa matemaatika eksami. Järelikult oliksamivalik üks tulemust mõjutavatest teguritest.

Naiste keskmine eksamitulemus oli oluliselt parem meeste omast (vastavad keskmised tulemused 31,0 punkti ja 28,9 punkti) ja see oli tingitud just II osa tulemustest. Meeste II osa keskmine tulemus jäi oluliselt madalamaks naiste tulemusest.

Eesti ja vene soorituskeelega eksaminandide keskmised tulemused ei erinenud teineteisest oluliselt kummagi eksamiosa puhul, küll aga tuli olulisi erinevusi ilmsiks üksikteemade valdamise osas. Ootuspäraselt oli kõige kõrgem tulemus gümnaasiumi päevase õppe eksaminandidel (34,2 punkti). Eksternõppe ja kutseõppe eksaminandide keskmine tulemus jäi alla 15 punkti. Eriti madal oli just nende II osa keskmine tulemus.

Eksamitöö ülesanded hõlmasid sisu poolest kõiki kitsa matemaatika ainekava kursusi ja nende seas oli nii tavapäraseid arvutus- ja teisendusülesandeid, paarisammulisi lihtsamaid rakendusülesandeid kui ka keerukamaid, mitmeetapilise mudeli koostamist nõudvaid ülesandeid. Vaid kahe ülesande keskmine lahendatus küündis üle 50%. Ülejäänud 10 ülesande keskmise lahendatuse protsendid jäävad vahemikku 35,0% kuni 17,1%. Eksami I osas oli vastamata jätmisest oluliselt vähem kui II osas, kus iga ülesande korral oli mittevastanud umbes üks kolmandik. Kõige suurem lahendamata jätmiste osakaal oli analüütilise geomeetria, integraali ja trigonomeetria ülesannetes. Kõige halvemini lahendatud nelja ülesande ühiseks tunnuseks oli see, et kõik need ülesanded kuuluvad X klassi kursustesse. See viib mõttele, et kitsa matemaatika ainekava peaks (analoogiliselt laiale matemaatika kursusele) sisaldama kogu gümnaasiumi materjali kordavat kursust.

Kitsa ja laia matemaatika eksami 50-punktise ühisosa tulemused näitavad selgelt nende kahe kontingendi oluliselt erinevat oskuste ja teadmiste taset. Kui laia matemaatika eksami tegijate keskmine tulemus oli kõigi ühisosa ülesannete korral üle 50%, siis kitsa matemaatika eksami tegijad saavutasid sellise tulemuse vaid kolme ülesande korral. Kitsa matemaatika eksami korral moodustab ühisosa ülesannete lahendatuse keskmine tulemus 15,3 punkti kogu töö keskmisest tulemusest 50,7%. Seega osutusid ühisosa ja ülejäänud eksamitöö ülesanded kitsa matemaatika eksami sooritanutele üheraskusteks. Selline ühisosa ülesannete valik tundub olevat mõistlik. Kui ühisossa oleks valitud kitsa matemaatika kursuse kõige keerukamad ülesanded, oleks erinevus veelgi suurem. Matemaatika ainekava kohaselt ületab laia matemaatika kursuse tundide arv 75% võrra kitsa matemaatika kursuse tundide arvu. Kitsa ja laia matemaatika kursuse läbinud õpilaste teadmised ja oskused on erinevad ja seetõttu on

kaheldav ka nende eksamineerimine analoogsete ülesannetega (ühisosa ülesanded). Praegune eksam näitas, et kaotajaks jäid kitsa matemaatika eksami tegijad.

Suuremale osale kitsa matemaatika eksami valinud õpilastest ülesanded ei sobinud. Valdavalt jäi ülesannete lahendatus madalaks. Eristusindeksi kriitilisest väärtusest 0,3 madalamad näitajad annavad tunnistust sellest, et suur osa ülesannetest ei võimaldanud diferentseerida eksaminande taseme järgi. Madala tulemuse põhjuseks võib olla veel

- kitsa matemaatika eksami valinute vähene motivatsioon, mille võis tingida edasiõppimise soovi puudumine ja liiga madal (1-punktiline) eksamikünnis;
- kitsa matemaatika kursuse õppijatel väike matemaatikatundide arv koolis;
- gümnaasiumi päevasest õppes erineva õppevormi läbinud eksaminandide suur osakaal;
- eksaminandide madalad võimed matemaatikas;
- liiga keerukad ülesanded.

Järgnevate eksamite ettevalmistamisel võiks arvestada kõigi viie eelpool nimetatud põhjusega. Eksami I ja II osa tulemuste vaheline kõrge korrelatsioon ning eksamitöodes ilmnenu suur eksimuste arv II osa esimestes ülesannetes viitavad sellele / annavad alust arvamusele, et edaspidi võiks kitsa matemaatika eksam olla ajaliselt lühem ja väiksema ülesannete arvuga.