Matemaatika riigieksami eristuskiri

1. Eksami eesmärgid

Vastavalt haridusministri 24.12.2001 määrusele nr 75 “Põhikooli ja gümnaasiumi lõpueksamite korraldamise ning põhikooli ja gümnaasiumi lõpetamise tingimused ja kord”, jõustunud 10.01.2002, matemaatika riigieksami peamiseks eesmärgiks on:

- hinnata riiklikus õppekavas määratletud õpitulemuste saavutatust matemaatikas;
- suunata õppeprotsessi eksami sisu ja vormi kaudu;
- siduda omavahel järjestikuseid haridusastmeid ja -tasemeid.

Matemaatika riigieksam võimaldab lisaks:

- õpilastel saada objektiivsem ettekujutus oma õpitulemustest ja koolil ennast hinnata;
- kooli pidajal, Haridus- ja Teadusministeeriumil, lastevanematel ja teistel saada tagasisidet õppimise ning õpetamise tulemuslikkusest koolis;
- võrrelda gümnaasiumilõpetajate eksamitulemusi;
- ühitada gümnaasiumi lõpueksamid kutseõppeasutuse, rakenduskõrgkooli ja ülikooli sisseastumiseksamitega.

2. Eksami vorm

Matemaatika riigieksam on kaheosaline kirjalik eksam. 1. osa kestus on 120 minutit ja 2. osa kestus on 150 minutit. Kahe eksamiosa vahel on vaheaeg kestusega 45 minutit.

2008. a matemaatika riigieksami esimeses osas tuleb lahendada viis 10-punktilist ülesannet ja teises osas 3 ülesannet, kaks 15-punktilist ülesannet ja üks 20-punktiline valikülesanne ette antud kahe erinevatesse ainevaldkondadesse kuuluva 20-punktilise ülesande hulgast. Kõikide õigesti lahendatud ülesannete eest on võimalik saada maksimaalselt 100 punkti.

Põhieksami eksamitöö on kahes (I ja II) variandis, lisaeksami eksamitöö ühes variandis.

Teooriaküsimusi 2008. a matemaatika riigieksamitöös iseseisvate ülesannetena ei esine.

Kõik ülesannete lahendamiseks vajalikud andmed on vastavate ülesannete tekstidega ette antud. Riigieksamil ei ole lubatud kasutada teatmikke, käsiraamatuid ja muid abimaterjale.

Eksamil võib kasutada kalkulaatorit.

Kalkulaator, kirjutus- ja joonestusvahendid peavad eksaminandil endal eksamil kaasas olema. Eksaminandidel ei ole lubatud eksamitöö ajal üksteisele kirjutus-, arvutus- ja joonestusvahendeid laenata. Paberi lahenduste vormistamiseks ja mustandi jaoks annab eksamikeskus. Eksami lõppedes annab eksaminand lahenduste lehe, ülesannete tekstide lehe ja mustandi üle eksamikomisjonile.

3. Eksami tase

Põhikooli ja gümnaasiumi riiklikus õppekavas (vt “Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava”, Riigi Teataja I osa nr 20 22.veebr.2002) on öeldud et gümnaasiumis võib õpilane valida kahe erineva matemaatika ainekava vahel. Need on matemaatika kitsas ja lai ainekava, mis erinevad oma mahult ja käsitluse sügavuselt. Kõigile kohustuslik on matemaatika kitsas ainekava, mis koosneb kaheksast ainekursusest ja 20- tunnisest kordavast osast.

Eksamitöö variantide koostamisel lähtutakse gümnaasiumi riikliku õppekavaga määratud matemaatika õppe-eesmärkidest, matemaatika kitsa ainekava õppesisust ja õpitulemustest.

Kõigile kohustuslike kitsa ainekava teemade kohta käivate eksamiülesannete komplektis on ülesandeid, mille tase vastab

a) matemaatika kitsas ainekavas eeldatud käsitluse sügavusele,
b) matemaatika laias ainekavas eeldatud käsitluse sügavusele.

Ülesannete valimisel matemaatika riigieksami ülesannete komplekti peetakse silmas eesmärki, et igal eksaminandil oleks eksamil võimalik näidata oma teadmiste ja oskuste maksimaalset taset.

Matemaatika riigieksam ei ole 12. klassi lõpueksam, vaid kogu koolimatemaatika põhiteadmiste ja -oskuste omandatust kontrolliv eksam.
Eksamiülesannete koostamisel eeldatakse, et eksaminandid on läbinud järgmised ainekursused:
1. Reaalarvud, võrrandid ja võrratused.
2. Trigonomeetria.
3. Vektor tasandil. Joone võrrand.
4. Funktsioonid I, II.
5. Funktsiooni piirväärtus ja tuletis.
6. Tõenäosusteooria ja kirjeldav statistika.
7. Stereomeetria. Vektor ruumis.

Riigieksamiülesannete koostamisel lähtutakse riiklikus õppekavas esitatud nõuetest, mille kohaselt gümnaasiumi lõpetaja

- oskab arvutada peast, kirjalikult ja kalkulaatori abil, oskab kriitiliselt hinnata arvutustulemusi;
- oskab teisendada algebralisi avaldisi;
- oskab lahendada ainekavaga fikseeritud võrrandeid ja võrrandisüsteeme ning võrratusi ja võrratussüsteeme;
- oskab kasutada õpitud mõõtühikuid ja seoseid nende vahel;
- tunneb ainekavaga fikseeritud ruumilisi kujundeid, oskab neid ja nende tasandilisi lõikeid joonisel kujutada;
- oskab arvutada ainekavaga fikseeritud kehade pindala ja ruumala ning kehade tasandiliste lõigete pindala;
- tunneb ainekavaga fikseeritud trigonomeetrilisi seoseid, oskab neid rakendada avaldiste lihtsustamisel, geomeetria ja stereomeetria ülesannete lahendamisel;
- tunneb ainekavaga fikseeritud funktsionaalseid seoseid ja oskab neid kasutada;
- tunneb ainekavaga fikseeritud funktsioonide graafikuid;
- oskab kirjeldada graafikuga esitatud funktsiooni omadusi;
- oskab uurida lihtsamaid tundmatuid funktsioone;
- tunneb ainekavaga määratud tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika mõisteid;
- oskab rakendada tõenäosusteoorias õpitut ülesannete ja reaalsuse probleemide lahendamisel;
- oskab koostada tabeleid ja diagramme ning neid analüüsida;
- oskab esemeid ja nähtusi klassifitseerida ühe või mitme tunnuse põhjal;
- saab aru defineerimise vajalikkusest ja oskab ainekavaga fikseeritud mõisteid defineerida;
- oskab liikuda mõttekäikudes üldiselt üksikule ja vastupidi;
- saab aru väidete tõestamise vajalikkusest ja oskab teoreeme teadmiste piires tõestada;
- oskab esitada matemaatiliste sümbolite keeles väljendatud teksti tavakeeles;
- oskab matemaatiliselt kirjeldada ülesannetes esitatud situatsioone ja probleeme ning neid lahendada;
- oskab prognoosida ja analüüsida lahendustulemusi;
- oskab kasutada matemaatilisi teadmisi teiste õppeainete ja igapäevaelu probleemide lahendamisel.

Eksami esimese osa ülesannetega kontrollitakse gümnaasiumi iga ainekursuse põhiteadmiste ja

-oskuste omamist ning oskust neid rakendada elulistes situatsioonides.

Eksami teise osa ülesannetega kontrollitakse, kuivõrd struktureeritud on eksaminandi teadmised, kui hästi ta suudab õpitud teadmisi seostada ja rakendada mitterutiinsete ülesannete korral ning milline on eksaminandi ettevalmistus õpingute jätkamiseks järgmisel astmel.

Õpitulemustes eristatakse 7 aspekti. Neist õpitulemused 1 ja 2 vastavad äratundmise, arusaamise ning memoreerimise tasandile:

1- õpilane teab gümnaasiumi ainekavaga määratud mõisteid, fakte, meetodeid ja protseduure;
2- õpilane saab aru matemaatika ainekavaga määratud mõistetest, faktidest, meetoditest ja protseduuridest ning oskab neid kasutada.

Rakendamisoskuse tasandile vastavad:

3- õpilane saab probleemist aru;
4- õpilane oskab informatsiooni tõlgendada (teha kujundite ja kehade jooniseid, joonistada ning lugeda funktsioonide graafikuid);
5- õpilane oskab valida lahendamisstrateegiat;
6- õpilane oskab andmeid töödelda (teha nõutavaid arvutusi, hinnata tulemusi);
7- õpilane oskab informatsiooni esitada, oskab lahenduskäiku selgitada (põhjendada), annab korrektse vastuse.

Matemaatika riigieksamitöö koostamisel arvestatakse, et hindepunktide jaotus eksamivariantides ühelt poolt õpitulemuste 1-2 ning teiselt poolt õpitulemuste 3 – 4 lõikes oleks ligikaudu 50 : 50.

Vt ka nt 2007. a matemaatika riigieksami ülesandeid koos lahenduste ja kommentaaridega aadressil http://www.ekk.edu.ee/92649 .

4. Hindamine

Matemaatika riigieksamitöid hinnatakse ülesannete kaupa.

Kriteeriumid, millest ülesannete lahenduste hindamisel lähtutakse on:

kas eksaminand

- teab keskkooli matemaatika kursuses käsitletavaid mõisteid, fakte, meetodeid ja protseduure;
- saab matemaatika mõistetest, faktidest, meetoditest ja protseduuridest aru, oskab neid kasutada;
- saab probleemist aru;
- oskab teha ülesandes nõutud arvutusi, oskab kasutada arvutusvahendeid ning arvutustulemusi hinnata;
- oskab lahenduskäiku selgitada (põhjendada);
- oskab teha tasandiliste kujundite ja ruumiliste kehade jooniseid, ehitada funktsioonide graafikuid ning neid lugeda;
- vastab küsimustele korrektselt.

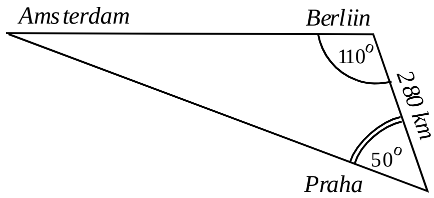
5. Eksamiülesannete lahenduste hindamise näiteid

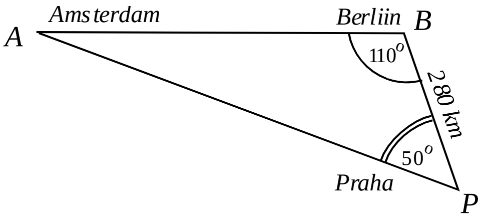
1. ülesanne (5 punkti) Lihtsustage avaldis

$$\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right).$$

LAHENDUS	HINDAMINE
$\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}^{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}^{\sqrt{a}-1}\right)\cdot\left(\sqrt{a}^{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=$	Algebraliste murdude lahutamise oskus 1
$=\frac{(\sqrt{a}+1)^2-(\sqrt{a}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{a})^2-1}{\sqrt{a}}=$	Algebra põhivalemite teadmine 1
$=\frac{(a+2\sqrt{a}+1-a+2\sqrt{a}-1)\cdot(a-1)}{(a-1)\cdot\sqrt{a}}=\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=4$	Juuravaldiste teisendamise oskus 3 Sulgude avamine lugejais 1, algebraliste murdude korrutamine 1, taandamine 1

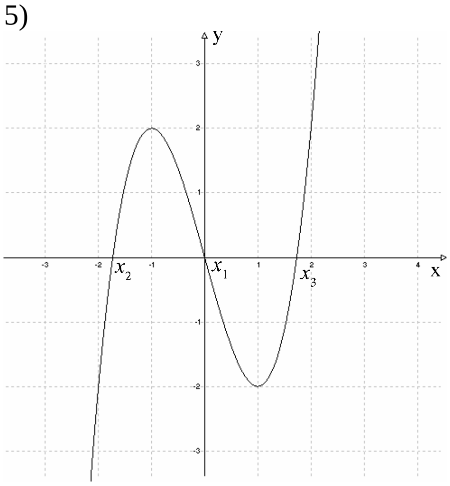
2. ülesanne (10 punkti) Amsterdam - Berliin - Praha moodustavad kolmnurga (vt joonist), mille kaks nurka on $50°$ ja $110°$. Berliinist Prahasse on 280 km. Kui kaugel on Amsterdam Berliinist ja Praha Amsterdamist? Vastus andke täpsusega 10 km.



LAHENDUS	HINDAMINE
 Tähistame kolmnurga tipud ja nurgad järgmiselt: Amsterdam – , Praha – *P*, Berliin – *B*, siis $\angle ABP = 110°, \angle BPA = 50°$. Kolmnurgast *APB* on antud üks külg (*BP*) ja selle kaks lähisnurka($\angle ABP, \angle BPA$), ülejäänud küljed saame leida siinusteoreemi abil, arvutades eelnevalt nurga *PAB*. $\angle PAB = 180° - (\angle ABP + \angle BPA) = 20°$ Rakendades siinusteoreemi $(\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma})$, saame : $AP = \frac{280 \cdot \sin 110°}{\sin 20°} \approx 770$ $AB = \frac{280 \cdot \sin 50°}{\sin 20°} \approx 630$ Vastus. Amsterdami ja Berliini vahemaa on ligikaudu 630 km ning Praha ja Amsterdami vahemaa ligikaudu 770 km.	Probleemi mõistmine 1 Informatsiooni tõlgendamine 1 Lahendusstrateegia omamine 1 Kolmnurga nurkade summa teadmine 1 Siinusteoreemi teadmine 1 Oskus kasutada siinusteoreemi 1 Külgede *AP* ja *BA* pikkuste arvutamine (kumbki 1 punkt) 2 Oskus õigesti ümardada 1 Tulemuse hindamine 1

3. ülesanne (15 punkti) Antud on funktsioon $y = x^3 - 3x$.

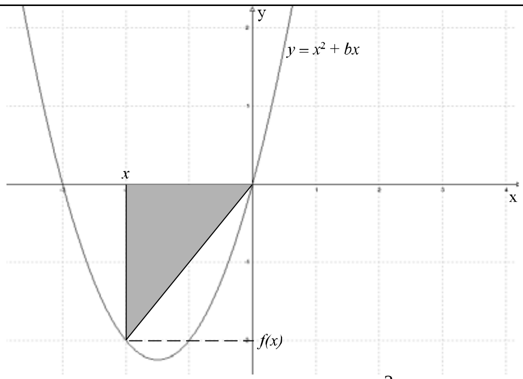
1) Leidke funktsiooni nullkohad.
2) Leidke funktsiooni tuletis.
3) Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.
4) Leidke funktsiooni graafiku maksimum- ja miinimumpunkti koordinaadid.
5) Joonestage funktsiooni $y = x^3 - 3x$ graafik.
6) Kirjutage välja antud funktsiooni positiivsuspiirkond.

LAHENDUS	HINDAMINE
$y = x^3 - 3x$ 1) Nullkohad: $x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}.$	Funktsiooni nullkoha mõiste teadmine 1 Erikujulise kuupvõrrandi lahendamise oskus 2
2) $y' = 3x^2 - 3$ 3)Kasvamis- ja kahanemisvahemike leidmiseks tingimused ($y' > 0$, $y' < 0$).	Monotoonsusvahemike tunnuste teadmine 1 Funktsiooni tuletise leidmise oskus 2
$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$	Ruutvõrratuse lahendamise oskus 1
$y' > 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x < -1, x > 1$ Kasvamisvahemikud: $(-\infty;-1)$, $(1;\infty)$.	Kasvamisvahemike leidmine 1
$y' < 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$ Kahanemisvahemik: $(-1;1)$.	Kahanemisvahemiku leidmine 1
4)Maksimum- ja miinimumkoha leidmiseks tingimused: $f'(x_{\max}) = 0, f''(x_{\max}) < 0;$ $f'(x_{\min}) = 0, f''(x_{\min}) > 0.$ $y' = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$ $y'' = 6x$ Kui $x = -1$, siis $y'' < 0$. Kui x=1, siis $y'' > 0$. Järelikult $x_{max} = -1$, $x_{min} = 1$.	Maksimum- ja miinimumkoha olemasolu tingimuste teadmine 1 Ekstreemumkohtade liigi määramise oskus 1
$y_{max} = y(-1) = 2$, $y_{min} = y(1) = -2$ Seega maksimumpunkt on punkt (–1; 2), miinimumpunkt on punkt (1; –2).	Ekstreemumpunktide ordinaatide arvutamine 1
5) 	Funktsiooni $y = x^3 - 3x$ graafiku joonestamine 1
6) Positiivsuspiirkond: $(-\sqrt{3};0) \cup (\sqrt{3};\infty)$.	Funktsiooni $y = x^3 - 3x$ positiivsuspiirkonna leidmine joonise abil 2

4. ülesanne (20 punkti) On antud funktsioonid $f(x) = x^2 - bx$ ($b > 0$) ja

$$g(x) = 8 \cdot 2^{x} + 2^{-x} - 9.$$

1) Joonestage x-teljega ja joonega $y = f(x)$ piiratud kujund ning selle sisse täisnurkne kolmnurk, mille üks tipp on koordinaatide alguses, üks kaatet x-teljel ja selle vastastipp joonel $y = f(x)$. Leidke selle kolmnurga maksimaalne võimalik pindala.
2) Leidke funktsiooni $g(x)$ nullkohad.
3) Määrake arv b, nii et funktsiooni $f(x)$ nullkohad ühtiksid $g(x)$ nullkohtadega. Arvutage saadud b väärtusel punktis 2) leitud kolmnurga pindala.

<table>
<tr><th>LAHENDUS</th><th>HINDAMINE</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Parabooli joonestamine 2

Kolmnurga joonestamine 2</td></tr>
<tr><td>1) Joonestame parabooli $y = x^2 - bx$, kus $b > 0$,
joonestame ülesande tingimustele vastava kolmnurga.
Leiame kolmnurga pindala $S = 0{,}5x(x^2 - bx)$, moodustame pindalafunktsiooni
$S(x) = 0{,}5x^3 + 0{,}5bx^2$,</td><td>Pindalafunktsiooni moodustamine 2</td></tr>
<tr><td>leiame $S'(x) = 1{,}5x^2 + bx$,
leiame funktsiooni $S'(x)$ nullkohad,
lahendades võrrandi $1{,}5x^2 + bx = 0$.
Saame $x_1 = -\frac{2b}{3}$, $x_2 = 0$, kus viimane on ilmselt võõrlahend.</td><td>Pindalafunktsiooni tuletise ja selle nullkohtade leidmine 3</td></tr>
<tr><td>Kontrollime, kas $-\frac{2b}{3}$ on maksimumkoht, leides näiteks $S''(-\frac{2b}{3}) = -b < 0$. Seega
$x_{\max} = -\frac{2b}{3}$.</td><td>Ekstreemumi olemasolu piisava tingimuse rakendamine 1</td></tr>
<tr><td>Leiame $S(-\frac{2b}{3}) = \frac{2b^3}{27}$.</td><td>Kolmnurga maksimaalse võimaliku pindala avaldamine parameetri b kaudu 2</td></tr>
<tr><td>2) Lahendame võrrandi $8 \cdot 2^x + 2^{-x} - 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 1 = 0$, millest</td><td>Mõistmine, et tegemist on 2^x suhtes ruutvõrrandiga ja selle lahendamine, st 2^x väärtuste leidmine, 3</td></tr>
<tr><td>a) $2^{x_1} = \frac{1}{8} \Rightarrow x_1 = -3$, b) $2^{x_2} = 1 \Rightarrow x_2 = 0$.</td><td>$x$ väärtuste leidmine 2</td></tr>
<tr><td>1) Funktsiooni $f(x)$ nullkohad peavad olema 0 ja –3, seega $f(0) = 0$ ja $f(-3) = 0$.
Järelikult $(-3)^2 + b \cdot (-3) = 0 \Rightarrow b = 3$.</td><td>Parameetri b väärtuse leidmine 2</td></tr>
<tr><td>Kui $b = 3$, siis $S = 2$.</td><td>Pindala leidmine 1</td></tr>
</table>