

Laia kursuse hindamisjuhend (RE matemaatika 2019)

NB! Kõikidel ülesannetel on rohkem kui üks õige lahendus. Alternatiivsete lahenduste punktijaotuse otsustas hindamiskomisjon. Hindamisjuhendis on toodud vaid kõige tüüpilisem(ad) lahendus(ed).

I osa

Ülesanne 1. (5 punkti)

Lihtsustage avaldis $\frac{a - \sqrt{4a}}{a} : \left(\frac{a+4}{\sqrt{a}} - 4\right)$, kus $a > 0$. Kas leidub arvu a selline väärtus, mille korral on antud avaldise väärtus 0? Põhjendage oma vastust.

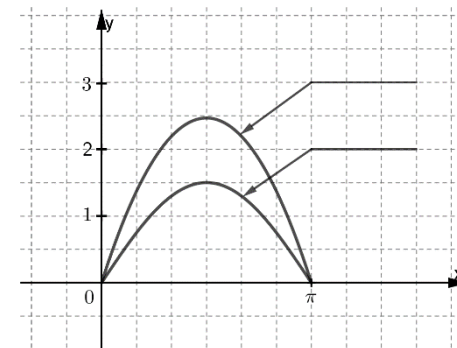
Lahendus	Teadmised ja oskused/hindamine	Punktid	Hindamiskast
$\frac{a - \sqrt{4a}}{a} : \left(\frac{a+4}{\sqrt{a}} - 4\right) = \frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a} - 2) \cdot \sqrt{a}}{a \cdot (\sqrt{a} - 2)^2} = \frac{1}{\sqrt{a} - 2}$	Avaldise lihtsustamine (lahutamine 2 punkti; jagamine 2 punkti).	4 punkti	Kast 1
$\frac{1}{\sqrt{a} - 2} \neq 0 \Rightarrow$ ei leidu, sest $1 \neq 0$.	Vastus + selgitus.	1 punkt	Kast 2

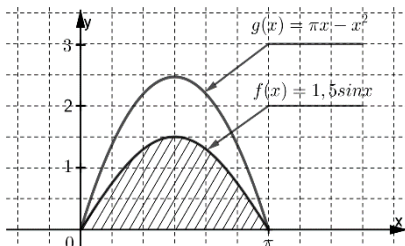
Ülesanne 2. (5 punkti)

Joonisel on funktsioonide $f(x) = 1,5 \sin x$ ja $g(x) = \pi x - x^2$ graafikud lõigul $[0; \pi]$.

1. Leidke joonise abil, kumma funktsiooni väärtused on vahemikus $(0; \pi)$ suuremad. Märkige joonisele nende funktsioonide valemid.

2. Arvutage integraal $\int_0^\pi 1,5 \sin x \, dx$. Viirutage joonisel kujund, mille pindala selle integraali abil leidsite.



Lahendus	Teadmised ja oskused/hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. N-õ ülemine on $g(x)$ ja alumine on $f(x)$, st vahemikus $(0; \pi)$ on: $g(x) > f(x)$. 2. $\int_0^\pi 1,5 \sin x \, dx = (-1,5 \cos x) _0^\pi = -1,5 \cos \pi + 1,5 \cos 0 = 3$ pindalaühikut. 	Funktsioonide valemite märkimine kokku 1 punkt ja väärtuste võrdlemine (nt jooniselt) 1 punkt. Integraali arvutamine 2 punkti ja kujundi viirutamine 1 punkt.	2 punkti 3 punkti	Kast 3 Kast 4

Ülesanne 3. (5 punkti)

Bussifirma kasutab piletimüügisüsteemi, kus iga viie pileti müümise järel tõuseb bussipileti hind ühe euro võrra. Õhtul väljuvale bussile on müüdud 25 piletit ja nende piletite müügist kokku on saadud 155 eurot. Kui palju maksis kõige odavam sellele bussile müüdud pilet?

Lahendus	Teadmised ja oskused/hindamine	Punktid	Hindamiskast
<u>I variant</u> Müüdud 5-piletilised komplektid moodustavad aritmeetilise jada, st ülesande teksti põhjal: $a_2 = a_1 + 5$ ja $S_5 = 155$ ning jada vahe $d = 5$. Saame võrrandi: $S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 155 \Rightarrow a_1 = 21.$ Kõige odavama pileti hind: $21 : 5 = 4,2$ eurot. <u>Vastus.</u> Kõige odavam pilet maksis 4,2 eurot. <u>II variant</u> Aritmeetiline jada, kus $n = 5$; $d = 1$; $S_5 = 31$. Saame võrrandi: $\frac{2a_1 + 4 \cdot 1}{2} \cdot 5 = 31 \Rightarrow a_1 = 4,2 \text{ eurot.}$ <u>Vastus.</u> Kõige odavam pilet maksis 4,2 eurot.	Ülesande lahendamine (võrrandi või aritmeetilise jada abil vm viisil). NB! Proovimise teel leitud ja õige vastus kokku 1 punkt. Maksimumpunktid (st 5 punkti) saab siis, kui on lisatud põhjendus/selgitus, et proovimise teel leitud lahend on ainus ja õige.	5 punkti	Kast 5

Ülesanne 4. (5 punkti)

Laul on kuus väliselt ühesugust kaarti, igal kaardil üks arv.

$$1; -2; 3^{-4}; \sqrt{5}; 6^7; -\frac{1}{8}.$$

Kaardid pööratakse ringi, segatakse ja võetakse juhuslikult kaks kaarti. Kui suur on tõenäosus, et:

- 1) mõlemal kaardil on täisarv,
- 2) vähemalt ühel kaardil on negatiivne arv.

Lahendus	Teadmised ja oskused/hindamine	Punktid	Hindamis-kast
1) Täisarv on 3 kaardil. A: Mõlemal kaardil on täisarv $p(A) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2$ või $p(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = 0,2$	Mõistete <i>täisarv</i> ja <i>negatiivne arv</i> teadmine. 1) tõenäosuse arvutamine.	Kokku 1 punkt 2 punkti	Kast 6 Kast 7
2) Negatiivne arv on 2 kaardil. B: Vähemalt ühel kaardil on negatiivne arv, st 1 või 2 kaardil on negatiivne arv $p(B) = \frac{C_2^1 \cdot C_4^1}{C_6^2} + \frac{C_2^2 \cdot C_4^0}{C_6^2} = \frac{8}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5} = 0,6$ või $p(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{6} = \frac{3}{5} = 0,6$	2) tõenäosuse arvutamine.	2 punkti	Kast 8

Ülesanne 5. (10 punkti)

Lahendage võrratusesüsteem

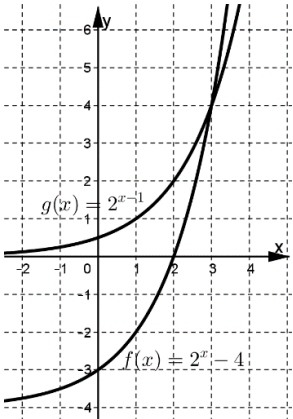
$$\begin{cases} (3x - 4)(x - 2) \leq x + 2 \\ \frac{3x - 4}{x - 2} < x + 2 \end{cases}$$

Lahendus	Teadmised ja oskused/hindamine	Punktid	Hindamiskast
Ruutvõrratus $3x^2 - 6x - 4x + 8 - x - 2 \leq 0 \Rightarrow$ $3x^2 - 11x + 6 \leq 0$ <u>Vastus.</u> $x \in \left[\frac{2}{3}; 3\right]$	Ruutvõrratuse lahendamine.	3 punkti	Kast 9
Murdvõrratus $\frac{3x - 4}{x - 2} < x + 2 \Rightarrow \frac{3x - 4 - x^2 - 2x + 2x + 4}{x - 2} < 0$ $\frac{-x^2 + 3x}{x - 2} < 0$ <u>Vastus.</u> $x \in (0; 2) \cup (3; \infty)$	Murdvõrratuse lahendamine intervallmeetodil vm võtet kasutades.	5 punkti	Kast 10
Ühisosa <u>Vastus.</u> $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right)$	Vastus (st võrratuste lahendite ühisosa leidmine).	2 punkti	Kast 11

Ülesanne 6. (10 punkti)

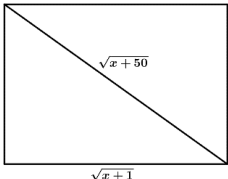
On antud funktsioonid $f(x) = 2^x - 4$ ja $g(x) = 2^{x-1}$.

1. Lahendage võrrand $f(x) = g(x)$.
2. Joonestage antud koordinaatteljestikku funktsioonide $f(x) = 2^x - 4$ ja $g(x) = 2^{x-1}$ graafikud.
3. Leidke reaalarvu m väärtus, mille korral funktsiooni $h(x) = 2^{mx}$ graafik läbib funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ graafikute lõikepunkti A.

Lahendus	Teadmised ja oskused/hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. $2^x - 4 = 2^{x-1} \Rightarrow 2^x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$ 2. 3. Kui $A(3; 4)$, siis $4 = 2^{3m} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$ 	EkspONENTVõrrandi lahendamine. Funktsioonide graafikute joonestamine (2 p + 2 p). Reaalarvu m leidmine.	4 punkti Kokku 4 punkti 2 punkti	Kast 12 Kast 13 Kast 14

Ülesanne 7. (10 punkti)

Ristküliku ühe külje pikkus on $\sqrt{x+1}$ cm ja diagonaali pikkus on $\sqrt{x+50}$ cm. Arvutage ristküliku pindala, kui selle ümbermõõt on x cm.

Lahendus	Teadmised ja oskused/hindamine	Punktid	Hindamiskast
y – ristküliku teine külj. Pythagorase teoreemi põhjal: $y^2 = (\sqrt{x+50})^2 - (\sqrt{x+1})^2$ $y^2 = x+50 - x - 1 \Rightarrow y = 7$ (cm) Ristküliku ümbermõõt avaldub kujul: $2 \cdot (7 + \sqrt{x+1}) = x$ $2\sqrt{x+1} = x - 14$ $x^2 - 32x + 192 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$ (vl); $x_1 = 24$ (cm) Ristküliku küljed on: 7 cm ja $\sqrt{24+1} = 5$ cm. Ristküliku pindala: $S = 7 \cdot 5 = 35$ (cm²) <u>Vastus.</u> Ristküliku pindala on 35 cm². 	Pythagorase teoreemi teadmine ja rakendamine (st ristküliku teise külje leidmine) kokku 2 punkti. Ristküliku ümbermõõdu teadmine ja võrrandi koostamine kokku 2 punkti. Juurvõrrandi lahendamine kokku 3 punkti, võõrlahendi eraldamine 1 punkt. Ristküliku teise külje ja pindala arvutamine kokku 2 punkti.	10 punkti	Kast 15

II osa

Ülesanne 8. (10 punkti)

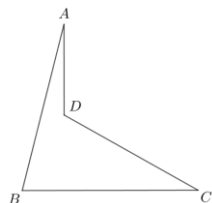
Sirge s läbib funktsiooni $f(x) = 0,5x^3 - 3x^2 + 6$ ekstreemumpunkte.

1. Koostage sirge s võrrand.
2. Sirgel s on funktsiooni $f(x)$ graafikuga veel üks ühine punkt P . Leidke punkti P koordinaadid.
3. Näidake, et punkt P on funktsiooni $f(x)$ graafiku käänupunkt.

Lahendus	Teadmised ja oskused/hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. $X_e: f'(x) = 0; f'(x) = 1,5x^2 - 6x;$ $1,5x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 4.$ Ekstreemumpunktide koordinaadid: $P_1(0; 6); P_1(4; -10).$ Sirge s võrrand: $\frac{x}{4} = \frac{y - 6}{-16} \Rightarrow 4x + y = 6$ või $y = -4x + 6.$ <u>Vastus.</u> Sirge s võrrand on: $y = -4x + 6.$	Tuletise leidmine 1 punkt. Ekstreemumpunktide koordinaatide leidmine kokku 2 punkti.	3 punkti	Kast 16
2. $\begin{cases} y = -4x + 6 \\ y = 0,5x^3 - 3x^2 + 6 \end{cases} \Rightarrow -4x + 6 = 0,5x^3 - 3x^2 + 6$ $x(0,5x^2 - 3x + 4) = 0$ $x_1 = 0; x_2 = 4; x_3 = 2.$ Kui $x = 2$, siis $f(2) = 0,5 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 6 = -2.$ <u>Vastus.</u> Punkti P koordinaadid: $P(2; -2).$	Sirge s võrrandi koostamine 2 punkti.	2 punkti	Kast 17
3. Kas punkt P on antud funktsiooni graafiku käänupunkt? $X_k: f''(x) = 0.$ $f''(x) = 3x - 6; 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ Järelikult punkt P on selle funktsiooni käänupunkt.	Võrrandisüsteemi lahendamine 2 punkti, punkti P koordinaatide arvutamine 1 punkt. Arvutuste abil on näidatud, et punkt P on selle funktsiooni käänupunkt (tingimus 1 punkt + arvutus 1 punkt).	3 punkti	Kast 18
		2 punkti	Kast 19

Ülesanne 9. (10 punkti)

Nelinurga $ABCD$ külg $AD = 6$ cm, külg $CD = 10$ cm ning küljed AB ja BC on võrdsed. Selle nelinurga sisenurk BCD on 30° ja sisenurk ADC on 240° . Arvutage nelinurga $ABCD$ külg AB ja pindala. Lõppvastused ümardage kümnendikeni.



Lahendus	Teadmised ja oskused/hindamine	Punktid	Hindamiskast
<u>I variant</u> <u>Kolmnurk ADC</u> Koosinusteoreem: $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos 120^\circ$ $AC = \sqrt{6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ} = 14$ (cm) Siinusteoreem: $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{AD}{\sin \angle DCA}$ $\frac{14}{\sin 120^\circ} = \frac{6}{\sin \angle DCA} \Rightarrow \angle DCA \approx 21,8^\circ$ <u>Kolmnurk ABC (võrdhaarne)</u> $\angle ABC \approx 180^\circ - 2(21,8^\circ + 30^\circ) \approx 76,4^\circ$ Siinusteoreem: $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle BCA}$ $\frac{14}{\sin 76,4^\circ} = \frac{AB}{\sin 51,8^\circ} \Rightarrow AB \approx 11,3$ (cm)	Külje AB leidmine (mistahes viisil) kokku 4 punkti. Nelinurga $ABCD$ pindala arvutamine (mistahes viisil) kokku 5 punkti. Lõppvastus(t)e ümardamine kokku 1 punkt.	10 punkti	Kast 20

$$S_{ABCD} = S_{ABC} - S_{ADC}$$

$$S_{ABCD} = \frac{11,32 \cdot 11,32 \cdot \sin 76,4^\circ}{2} - \frac{6 \cdot 10 \cdot \sin 120^\circ}{2} \approx 36,3 \text{ (cm}^2\text{)}$$

II variant

Kolmnurk ADC

Koosinusteoreem:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos 120^\circ$$

$$AC = \sqrt{6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ} = 14 \text{ (cm)}$$

Kas punktid A , D ja E asuvad ühel sirgel?

Vaatame täisnurkseid kolmnurki DEC ja AEC .

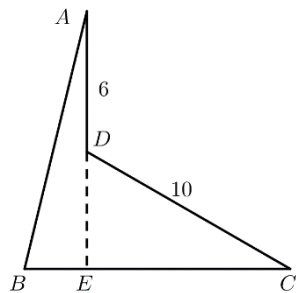
$$ED = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ (cm)}$$

Kas kehtib võrdus:

$$EC = \sqrt{DC^2 - ED^2} = \sqrt{AC^2 - AE^2}$$

$$EC = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{14^2 - 11^2} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Järelikult punktid A , D ja E asuvad ühel sirgel.



Punktist D tõmmata ristlõik nelinurga küljega BC , küljele BC punkt E .

Kolmnurk CDE

$$\sin 30^\circ = \frac{ED}{CD} \Rightarrow ED = CD \cdot \sin 30^\circ$$

$\cos 30^\circ = \frac{EC}{CD} \Rightarrow EC = CD \cdot \cos 30^\circ$ $EC = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}$ $S_{CDE} = \frac{ED \cdot EC}{2} \Rightarrow S_{CDE} = \frac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$ <u>Kolmnurk ABE</u> $AB^2 = AE^2 + BE^2 \Rightarrow AB^2 = 11^2 + (AB - 5\sqrt{3})^2$ $AB^2 = 121 + AB^2 - 10\sqrt{3} AB + 75$ $AB = \frac{98}{5\sqrt{3}} \text{ (cm)} \approx 11,3 \text{ (cm)}$ $AB = BC \Rightarrow BE = AB - EC$ $BE = \frac{98}{5\sqrt{3}} - 5\sqrt{3} = \frac{98 - 75}{5\sqrt{3}} = \frac{23}{5\sqrt{3}} \text{ (cm)}$ $S_{ABE} = \frac{BE \cdot AE}{2} \Rightarrow S_{ABE} = \frac{23 \cdot 11}{2 \cdot 5\sqrt{3}} = \frac{253\sqrt{3}}{30} \text{ (cm}^2\text{)}$ <u>Nelinurk ABCD</u> $S_{ABCD} = S_{CDE} + S_{ABE}$ $S_{ABCD} = \frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{253\sqrt{3}}{30} = \frac{628\sqrt{3}}{30} \approx 36,3 \text{ (cm}^2\text{)}$ <u>Vastus.</u> Kolmnurga külg on $AB \approx 11,3$ cm ja pindala on $S \approx 36,3$ cm².			
---	--	--	--

Ülesanne 10. (10 punkti)

1. Lihtsustage avaldis $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \frac{2}{\cos(360^\circ - \alpha)}$.
2. Leidke funktsiooni $f(x) = 2 \sin^2 x - \cos x - 2$ nullkohad lõigul $[0; 2\pi]$.

Lahendus	Teadmised ja oskused/hindamine	Punktid	Hindamiskast
$1. \frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \frac{2}{\cos(360^\circ - \alpha)} = \frac{2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha} =$ $= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$	Avaldise lihtsustamine.	4 punkti	Kast 21
$2. X_0: f(x) = 0$ $2 \sin^2 x - \cos x - 2 = 0$ $2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 2 = 0$ $2 \cos^2 x + \cos x = 0$ $\cos x(2 \cos x + 1) = 0$ $1) \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{3\pi}{2}$ $2) \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{2\pi}{3}; x_4 = \frac{4\pi}{3}$	Võrrandi teisendamine põhivõrranditeks 2 punkti. Võrrandite erilahendid antud lõigul a' 1 punkt.	6 punkti	Kast 22
<u>Vastus.</u> $X_0 = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right\}$ või $X_0 = \{90^\circ; 120^\circ; 240^\circ; 270^\circ\}$			

Ülesanne 11. (10 punkti)

Punktid $A(3; 0)$ ja $B(7; 4)$ on rööpküliku $ABCD$ tipud ja selle rööpküliku diagonaali AC kirjeldab vektor $\overrightarrow{AC} = (2; 8)$.

1. Arvutage rööpküliku tippude C ja D koordinaadid ning tehke joonis.
2. Rööpkülikust $ABCD$ lõigatakse välja võimalikult suur ring. Arvutage selle ringi täpne raadius.

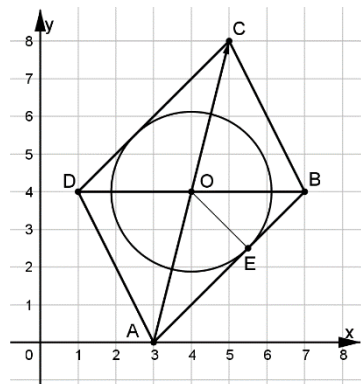
Lahendus	Teadmised ja oskused/hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. Kui $C(x; y)$, siis $\begin{cases} x - 3 = 2 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow C(5; 8)$. Kui $D(X; Y)$, siis rööpküliku omaduste põhjal $\begin{cases} \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$. Kui $\overrightarrow{BC} = (-2; 4)$ ja $\overrightarrow{AD} = (X - 3; Y)$, siis $\begin{cases} X - 3 = -2 \\ Y = 4 \end{cases} \Rightarrow D(1; 4)$. 2. Ringi raadius OE on pool rööpküliku pikemate külgede AB ja DC vahelisest kaugusest. $AC: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{8} \Rightarrow y = 4x - 12$ $BD: \frac{x-7}{-6} = \frac{y-4}{0} \Rightarrow y = 4$ Punkti O koordinaadid: $4x - 12 = 4 \Rightarrow x = 4$ ja $O(4; 4)$. Sirge OE ja AB on risti, st nende sirgete tõusude korrutis $k_1 \cdot k_2 = -1$. $AB: \frac{x-3}{4} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = x - 3 \Rightarrow k_1 = 1$ ja sirge OE tõus on: $k_2 = -1$. $OE: y - 4 = -(x - 4) \Rightarrow y = -x + 8$	Punkti C koordinaatide leidmine 1 punkt. Punkti D koordinaatide leidmine 2 punkti. Ringi keskpunkti O koordinaatide arvutamine 2 punkti. Sirgete ristseisu tunnuse teadmine 1 punkt. Sirge AB võrrandi koostamine 1 punkt. Sirge OE võrrandi koostamine 1 punkt.	3 punkti 7 punkti	Kast 23 Kast 24

Punkti E koordinaadid:

$$\begin{cases} y = x - 3 = 2 \\ y = -x + 8 \end{cases} \Rightarrow E(5,5; 2,5)$$

Ringi raadius OE :

$$|\overrightarrow{OE}| = \sqrt{(5,5 - 4)^2 + (2,5 - 4)^2} = \sqrt{1,5^2 + (-1,5)^2} = \sqrt{4,5} \text{ ühikut.}$$



Punkti E koordinaatide leidmine 1 punkt.

Ringi raadiuse OE arvutamine 1 punkt.

Ülesanne 12. (10 punkti)

Püramiidi $EABCD$ põhi on ruut $ABCD$. Püramiidi külgserv DE on ka püramiidi kõrgus. Püramiidi külgtahu ADE pindala on $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ja külgserv AE moodustab põhitaluga nurga 60° . Arvutage külgserva BE täpne pikkus ning selle külgserva ja põhitalu vaheline nurk.

Lahendus	Teadmised ja oskused/hindamine	Punktid	Hindamiskast
$AB = BC = CD = AD$ – põhiserv DE – kõrgus Leiame püramiidi kõrguse DE ja põhiserva AB. <u>Kolmnurk ADE</u> $\begin{cases} \frac{AD \cdot DE}{2} = 18\sqrt{3} \\ \tan 60^\circ = \frac{DE}{AD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD = 6 \text{ (cm)} \\ DE = 6\sqrt{3} \text{ (cm)} \end{cases}$ <u>Kolmnurk BDE</u> $BE = \sqrt{DE^2 + DB^2}$ $BE = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \text{ (cm)}$ $\sin \alpha = \frac{DE}{BE} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{DE}{BE}$ NB! α võib leida ka koosinuse või tangensi kaudu. $\alpha = \arcsin \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{5}} = \arcsin \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \alpha \approx 50^\circ 46'$	Joonis (või ülesande sisu õigesti mõistmine) 1 punkt. Võrrandisüsteemi koostamine 2 punkti ja selle lahendamine 2 punkti. Ruudu diagonaali BD arvutamine 1 punkt. Külgserva BE arvutamine 2 punkti. Nurga α arvutamine 2 punkti.	10 punkti	Kast 25