

MATEMAATIKA RIIGIEKSAMI ERISTUSKIRI

1. Eksami eesmärgid

Matemaatika riigieksami peamisteks eesmärkideks on:

- hinnata õpilaste riiklikus õppekavas määratletud matemaatika õpitulemuste saavutatust;
- suunata eksami sisu ja vormi kaudu õppeprotsessi;
- siduda omavahel järjestikuseid haridusastmeid ja -tasemeid.

(Vt “Tasemetööde ning põhikooli ja gümnaasiumi lõpueksamite ettevalmistamise, koostamise, läbiviimise ja hindamise tingimused ja kord ning tasemetööde, ühtsete põhikooli lõpueksamite ja riigieksamite tulemuste analüüsimise tingimused ja kord” <https://www.riigiteataja.ee/akt/13359329>)

Lisaks võimaldab matemaatika riigieksam:

- õpilastel saada objektiivsemat ettekujutus oma õpitulemustest ning koolidel ennast objektiivsemalt hinnata ja teistega võrrelda;
- kooli pidajal, Haridus- ja Teadusministeeriumil, lapsevanematel jt saada tagasisidet õppimise ning õpetamise tulemuslikkusest koolis;
- võrrelda gümnaasiumilõpetajate eksamitulemusi;
- ühitada gümnaasiumi lõpueksamid kutseõppeasutuse, rakenduskõrgkooli ja ülikooli sisseastumiseksamitega.

2. Eksami sihtrühm

Matemaatika riigieksamile võivad registreeruda:

- 1) põhikooli ja gümnaasiumi riikliku õppekava järgi õppivad gümnaasiumilõpetajad, kes on läbinud (minimaalselt) gümnaasiumi matemaatika ainekava 8 (kaheksa) ainekursust (a´ 35 tundi) ja 20-tunnilise kordava kursuse;
- 2) põhihariduse baasil kutseõppeasutuses lõpukursustel õppivad õpilased;
- 3) varem gümnaasiumi või kutseõppeasutuse lõpetanud isikud, kes ei ole antud õppeaines riigieksamit sooritanud;
- 4) varem gümnaasiumi või kutseõppeasutuse lõpetanud isikud, kes soovivad mõnel varasema aasta riigieksamil saadud tulemust parandada;
- 5) välisriigis Eesti keskharidusele vastava haridustaseme omandanud isikud;
- 6) gümnaasiumite õpilased, kes ei ole 12. klassis, kuid kellel on eksamiaines gümnaasiumiastme kohustuslikud kursused läbitud ja kutseõppeasutuste õpilased, kes ei ole lõpukursusel, kuid kellel on eksamiaine kohustuslikud kursused läbitud.

3. Eksami vorm ja korraldus

Matemaatika riigieksami (põhieksami) ja lisaeksami toimumise kuupäevad kinnitatakse igal aastal haridusministri vastava määrusega (hiljemalt eksamile eelneva kalendriaasta 25. maiks).

Riigieksami (nii põhieksami kui ka lisaeksami) valmistab ette Riiklik Eksami- ja Kvalifikatsioonikeskus (edaspidi Eksamikeskus). Eksamikeskus tagab eksamitööde sisulise ja vormilise ettevalmistuse ning ühtsetel alustel eksami korralduse ja hindamise.

Matemaatika riigieksami põhieksam on kahes variandis ja lisaksam ühes variandis.

Matemaatika riigieksam (ja ka lisaeksam) on kaheosaline kirjalik eksam – 1. osa kestus on 120 minutit ja 2. osa kestus on 150 minutit. Kahe eksamiosa vahel on 45 minutiline vaheaeg.

Eksami 1. osa ülesannetega kontrollitakse gümnaasiumi iga ainekursuse põhiteadmiste ja -oskuste omandatust ning oskust neid teadmisi ja oskusi rakendada elulistes situatsioonides.

Eksami 2. osa ülesannetega kontrollitakse, kuivõrd struktureeritud on eksaminandi teadmised, kui hästi ta suudab õpitud teadmisi seostada ja rakendada mitterutiinsete ülesannete korral ning milline on eksaminandi ettevalmistus õpingute jätkamiseks järgmisel haridusastmel.

Matemaatika riigieksami 1. osas tuleb lahendada 5 (viis) 10-punktilist kohustuslikku ülesannet ja 2. osas 3 (kolm) ülesannet – 2 (kaks) 15-punktilist kohustuslikku ülesannet ja 1 (üks) 20-punktiline valikülesanne, mille eksaminand valib kahe erinevasse ainevaldkonda kuuluva 20-punktilise ülesande hulgast. Kokku tuleb eksaminandil lahendada 8 (kaheksa) ülesannet. Kõikide õigesti lahendatud ülesannete eest kokku on võimalik saada maksimaalselt 100 punkti.

Riigieksamil ei ole lubatud kasutada teatmikke, käsiraamatuid ja muid abimaterjale. Eksamiruumis ei tohi olla nähtaval kohal skeeme, pilte, tabeleid jm matemaatilist informatsiooni sisaldavaid materjale.

Eksaminandid istuvad eksamiruumis ühe kaupa ja eksamitööd jagatakse malelaua põhimõttel. Laudadevaheline kaugus peab olema piisav, et eksaminandid saaksid iseseisvalt ja häirimatult töötada.

Eksaminand kasutab eksamil isiklikke kirjutus- ja joonestusvahendeid ning taskuarvutit. Eksaminandidel ei ole lubatud eksamitöö ajal üksteisele kirjutus-, arvutus- ja joonestusvahendeid laenata. Eksamitöö kirjutatakse sinise või musta tindi- või pastapliiatsiga, harilik pliiats on mõeldud vaid jooniste tegemiseks. Punase värvi ja korrektuurivedeliku või -pliiatsi kasutamine ei ole lubatud. Mobiiltelefoni kasutamine mistahes eesmärgil on keelatud.

Eksaminandil ei ole lubatud eksami ajal eksamiruumist lahkuda. Kui see siiski on mingil põhjusel vajalik, siis märgib eksamikomisjon eksamitööle eksamiruumist lahkumise ja sinna naasmise aja ning märgib eksami toimumise protokollis eksamiruumist lahkumise põhjuse.

Mõlema eksamiosa lõppedes annab eksaminand vastava eksamiosa lahenduste vihiku eksamikomisjonile. Kui eksaminand lõpetab lahendamise ettenähtust varem, siis on tal lubatud peale eksamitöö üleandmist eksamiruumist lahkuda.

Mõlema eksamiosa lõppedes sulgeb eksamikomisjon koheselt vastava eksamiosa töödega ümbrikud ja need saadetakse Eksamikeskusesse, kus töid hindab haridus- ja teadusministri määrusega kinnitatud komisjon.

Mustandid säilitatakse koolis.

4. Eksamil nõutud teadmiste ja oskuste tase

Gümnaasiumi riiklikus õppekavas (vt “Gümnaasiumi riiklik õppekava”; <https://www.riigiteataja.ee/akt/128122010018>) on öeldud, et õpilane võib gümnaasiumis valida kahe erineva matemaatikakursuse, s.t kitsa või laia matemaatikakursuse vahel. Kitsas ja lai matemaatikakursus erinevad oma mahult ja käsitluse sügavuselt. Kitsas matemaatikakursus on kõigile kohustuslik ning koosneb 8 (kaheksast) ainekursusest (a´ 35

tundi) ja 20-tunnisest kordavast kursusest. Igal koolil on võimalik lülitada õppekavva matemaatika valikkursusi ja nii võib tekkida mitmeid erinevaid matemaatikakursuse variante. Eksamitöö koostamisel lähtutakse gümnaasiumi riikliku õppekavaga määratud matemaatika õppe-eesmärkidest, kõigile kohustusliku (kitsa matemaatika) ainekava õppesisust ja õpitulemustest.

Matemaatika riigieksam ei ole 12. klassi lõpueksam, vaid kogu koolimatemaatika põhiteadmiste ja -oskuste omandatust kontrolliv eksam.

Eksamiülesannete koostamisel eeldatakse, et eksaminand on (minimaalselt) läbinud järgmised ainekursused:

1. Reaalarvud. Võrrandid ja võrratused.
2. Trigonomeetria.
3. Vektor tasandil. Joone võrrand.
4. Funktsioonid I.
5. Funktsioonid II.
6. Funktsiooni piirväärtus ja tuletis.
7. Tõenäosusteooria ja kirjeldav statistika.
8. Stereomeetria.

Õpitulemustes eristatakse:

- 1) teadmise ja mõistmise tasand
 - õpilane teab gümnaasiumi ainekavaga määratud mõisteid, fakte, meetodeid ja protseduure;
 - õpilane saab aru matemaatika ainekavaga määratud mõistetest, faktidest, meetoditest ja protseduuridest ning oskab neid kasutada, kirjeldada, selgitada.
- 2) rakendamisoskuse tasand
 - õpilane saab probleemist aru;
 - õpilane oskab informatsiooni tõlgendada (teha kujundite ja kehade jooniseid, joonistada ning lugeda funktsioonide graafikuid);
 - õpilane oskab valida lahendamisstrateegiat;
 - õpilane oskab andmeid töödelda (teha nõutavaid arvutusi, hinnata tulemusi, võtta vastu otsuseid, teha järeldusi);
 - õpilane oskab informatsiooni esitada, oskab lahenduskäiku selgitada (põhjendada), annab korrektse vastuse.

Matemaatika riigieksami ülesannete ettevalmistamisel peetakse silmas, et iga eksaminand saaks eksamil näidata oma teadmiste ja oskuste maksimaalset taset.

Matemaatika riigieksamitöö koostamisel arvestatakse, et eksamitöö sisaldaks erineva raskusastmega ülesandeid - ca 50% maksimaalselt saadavatest punktidest on teadmiste ja mõistmise ja ca 50% rakendamisoskuse tasandil omandatud teadmiste eest.

Teooriaküsimusi matemaatika riigieksamitöös iseseisvate ülesannetena ei esine.

5. Hindamine ja tulemuste apelleerimine

Matemaatika riigieksamitöid hindab haridus- ja teaduministri määrusega kinnitatud komisjon.

Riigieksami ülesannete lahenduste hindamisel arvestatakse seda, kas eksaminand:

- teab koolimatemaatika kursustes käsitletavaid mõisteid, fakte, meetodeid ja protseduure;
- saab matemaatilistest mõistetest, faktidest, meetoditest ja protseduuridest aru, oskab neid kasutada;
- saab ülesannetes püstitatud probleemidest aru;
- oskab teha ülesannetes nõutud arvutusi, oskab kasutada arvutusvahendeid ning saadud arvutustulemusi hinnata;
- oskab lahenduskäike selgitada (põhjendada);
- oskab teha tasandiliste kujundite ja ruumiliste kehade jooniseid, skitseerida ja lugeda funktsioonide graafikuid;
- oskab esitatud küsimustele korrektselt vastata.

Matemaatika riigieksamitööd hinnatakse hindamiskomisjoni poolt kinnitatud hindamisjuhendi põhjal, üksikülesannete kaupa ja täispunktides.

Hindamiskomisjon ei loe ega hinda hariliku pliiatsiga kirjutatud lahendusi ega mustandipaberile kirjutatud.

Eksamitöö lõplikuks tulemuseks loetakse 1. ja 2. osa summeeritud punktid. Gümnaasiumi lõpetamiseks on riigieksami tulemus positiivne alates 20 punktist. Kui riigieksamitulemus on vähem kui 20 punkti, on riigieksam sooritatud mitterahuldavalt.

Kui eksaminand ei ole oma eksamitulemusega nõus, siis on tal õigus esitada Haridus- ja Teadusministeeriumi järelevalveosakonnale 5 tööpäeva jooksul peale eksamitulemuste väljastamist apellatsioon. Erapooletu apellatsioonikomisjon kontrollib (10 tööpäeva jooksul avalduse registreerimise hetkest) veelkord eksaminandi tööd ja teatab avalduse esitajale kirjalikult oma otsusest. Apellatsioonikomisjonil on õigus jätta eksamitöö tulemus muutmata, seda tõsta või langetada.

6. Õppematerjalid eksamiks valmistumisel

- T. Tõnso, A. Veelmaa „Matemaatika X, XI, XII klassile“; Mathema
- L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker „Matemaatika X, XI, XII klassile; Koolibri
- E. Abel, E. Jõgi, E. Mitt „Matemaatika ülesannete kogu keskkoolile“; Koolibri
- L. Lepmann, T. Lepmann, H.-M. Varul „Ülesandeid gümnaasiumi matemaatika lõpueksamiks valmistumisel“; Koolibri
- H. Uudelepp „Matemaatika riigieksami ülesanded koos lahenduste ja kommentaaridega“; Argo

jpt.

7. Näiteid eksamiülesannete lahenduste hindamise kohta

NB!

- Enamuse ülesannete korral on õigeid lahendusi rohkem kui üks. Hindamiskomisjon hindab alati ka kõiki alternatiivseid lahendusi.
- Hindamisel on oluline lahenduskäik ja -idee, mitte õige lõppvastus.

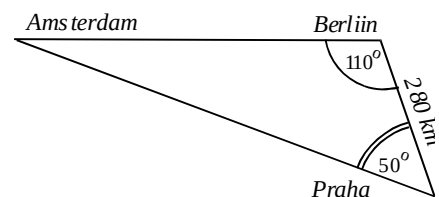
Näited on valitud varasemate aastate riigieksamite ülesannete hulgast.

$$\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right).$$

1. ülesanne (5 punkti) Lihtsustage avaldis

LAHENDUS	HINDAMINE
$\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) =$ $= \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{a})^2 - 1}{\sqrt{a}} =$ $= \frac{(a+2\sqrt{a}+1 - a+2\sqrt{a}-1) \cdot (a-1)}{(a-1) \cdot \sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 4$	Algebraliste murdude lahutamise oskus 1 p Algebra põhivalemite teadmine 1 p Juuravaldiste teisendamise oskus 3 p Sulgude avamine lugejais 1 p Algebraliste murdude korrutamine 1 p Taandamine 1 p

2. ülesanne (10 punkti) Amsterdam - Berliin - Praha moodustavad kolmnurga (vt joonist), mille kaks nurka on 50° ja 110° . Berliinist Prahasse on 280 km. Kui kaugel on Amsterdam Berliinist ja Praha Amsterdamist? Vastus andke täpsusega 10 km.



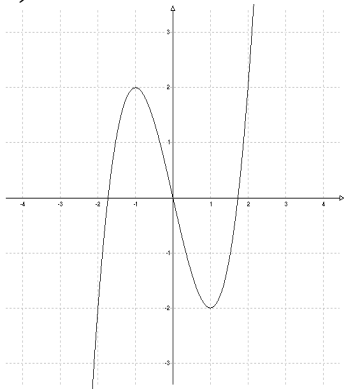
LAHENDUS	HINDAMINE
Tähistame kolmnurga tipud ja nurgad järgmiselt: Amsterdam – , Praha – P, Berliin – B, siis $\angle ABP = 110^\circ$, $\angle BPA = 50^\circ$. Kolmnurgast APB on antud üks külge (BP) ja selle kaks lähisnurka ($\angle ABP$, $\angle BPA$), ülejäänud küljed saame leida siinusteoreemi abil, arvutades eelnevalt nurga PAB. $\angle PAB = 180^\circ - (\angle ABP + \angle BPA) = 20^\circ$	Probleemi mõistmine 1 p Informatsiooni tõlgendamine 1 p Lahendusstrateegia omamine 1 p Kolmnurga nurkade summa teadmine 1 p Siinusteoreemi teadmine 1 p Oskus kasutada siinusteoreemi 1 p Külgede AP ja BA pikkuste arvutamine 2 p (a´ 1 punkt) Oskus õigesti ümardada 1 p Tulemuse hindamine 1 p

Rakendades siinusteoreemi $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$ saame : $AP = \frac{280 \cdot \sin 110^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 770$ $AB = \frac{280 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 630$ Vastus. Amsterdami ja Berliini vahemaa on ligikaudu 630 km ning Praha ja Amsterdami vahemaa ligikaudu 770 km.	
---	--

3. ülesanne (15 punkti) Antud on funktsioon $y = x^3 - 3x$.

- 1) Leidke funktsiooni nullkohad.
- 2) Leidke funktsiooni tuletis.
- 3) Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.
- 4) Leidke funktsiooni graafiku maksimum- ja miinimumpunkti koordinaadid.
- 5) Joonestage funktsiooni $y = x^3 - 3x$ graafik.
- 6) Kirjutage välja antud funktsiooni positiivsuspiirkond.

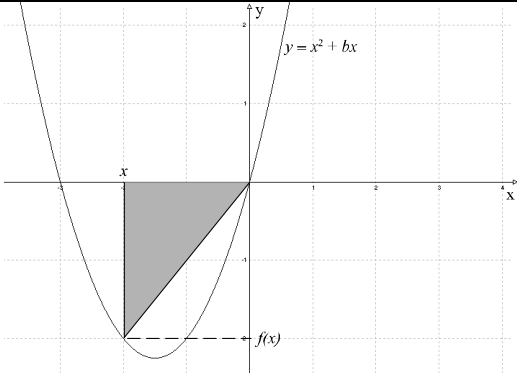
LAHENDUS	HINDAMINE
----------	-----------

$y = x^3 - 3x$ 1) Nullkohad: $x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}$. 2) $y' = 3x^2 - 3$ 3) Kasvamis- ja kahanemisvahemike leidmiseks tingimused ($y' > 0, y' < 0$). $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$ $y' > 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x < -1, x > 1$ Kasvamisvahemikud: $(-\infty; -1), (1; \infty)$. $y' < 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$ Kahanemisvahemik: $(-1; 1)$. 4) Maksimum- ja miinimumkoha leidmiseks $f'(x_{\max}) = 0, f''(x_{\max}) < 0$; tingimused: $f'(x_{\min}) = 0, f''(x_{\min}) > 0$. $y' = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$ $y'' = 6x$ Kui $x = -1$, siis $y'' < 0$. Kui $x = 1$, siis $y'' > 0$. Järelikult $x_{\max} = -1, x_{\min} = 1$. $y_{\max} = y(-1) = 2, y_{\min} = y(1) = -2$ Seega maksimumpunkt on punkt $(-1; 2)$, miinimumpunkt on punkt $(1; -2)$. 5)  6) Positiivsuspiirkond: $(-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; \infty)$	Funktsiooni nullkoha mõiste teadmine 1 p Erikujulise kuupvõrrandi lahendamise oskus 2 p Monotoonsusvahemike tunnuste teadmine 1 p Funktsiooni tuletise leidmise oskus 2 p Ruutvõrratuse lahendamise oskus 1 p Kasvamisvahemike leidmine 1 p Kahanemisvahemiku leidmine 1 p Maksimum- ja miinimumkoha olemasolu tingimuste teadmine 1 p Ekstreemumkohtade liigi määramise oskus 1 p Ekstreemumpunktide ordinaatide arvutamine 1 p Funktsiooni $y = x^3 - 3x$ graafiku joonestamine 1 p Funktsiooni $y = x^3 - 3x$ positiivsuspiirkonna leidmine joonise abil 2 p
--	---

4. ülesanne (20 punkti) On antud funktsioonid $f(x) = x^2 - bx$ ($b > 0$) ja

$$g(x) = 8 \cdot 2^x + 2^{-x} - 9.$$

- 1) Joonestage x -teljega ja joonega $y = f(x)$ piiratud kujund ning selle sisse täisnurkne kolmnurk, mille üks tipp on koordinaatide alguses, üks kaatet x -teljel ja selle vastastipp joonel $y = f(x)$. Leidke selle kolmnurga maksimaalne võimalik pindala.
- 2) Leidke funktsiooni $g(x)$ nullkohad.
- 3) Määrake arv b , nii et funktsiooni $f(x)$ nullkohad ühtiksid $g(x)$ nullkohtadega.
- 4) Arvutage saadud b väärtusel punktis 2) leitud kolmnurga pindala.

LAHENDUS	HINDAMINE
 1) Joonestame parabooli $y = x^2 - bx$, kus $b > 0$, joonestame ülesande tingimustele vastava kolmnurga. Leiaime kolmnurga pindala $S = 0,5x(x^2 - bx)$, moodustame pindalafunktsiooni $S(x) = 0,5x^3 + 0,5bx^2$, leiame $S'(x) = 1,5x^2 + bx$, leiame funktsiooni $S'(x)$ nullkohad, lahendades võrrandi $1,5x^2 + bx = 0$. Saame $x_1 = -\frac{2b}{3}$, $x_2 = 0$, kus viimane on ilmselt võõrlahend. Kontrollime, kas $-\frac{2b}{3}$ on maksimumkoht, leides näiteks $S''(-\frac{2b}{3}) = -b < 0$. Seega $x_{\max} = -\frac{2b}{3}$. Leiaime $S(-\frac{2b}{3}) = \frac{2b^3}{27}$. 2) Lahendame võrrandi $8 \cdot 2^x + 2^{-x} - 9 = 0 \Rightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 1 = 0$, millest a) $2^{x_1} = \frac{1}{8} \Rightarrow x_1 = -3$, b) $2^{x_2} = 1 \Rightarrow x_2 = 0$. 1) Funktsiooni $f(x)$ nullkohad peavad olema 0 ja -3, seega $f(0) = 0$ ja $f(-3) = 0$. Järelikult $(-3)^2 + b \cdot (-3) = 0 \Rightarrow b = 3$. Kui $b = 3$, siis $S = 2$.	Parabooli joonestamine 2 p Kolmnurga joonestamine 2 p Pindalafunktsiooni moodustamine 2 p Pindalafunktsiooni tuletise ja selle nullkohtade leidmine 3 p Ekstreemumi olemasolu piisava tingimuse rakendamine 1 p Kolmnurga maksimaalse võimaliku pindala avaldamine parameetri b kaudu 2 p Mõistmine, et tegemist on 2^x suhtes ruutvõrrandiga ja selle lahendamine, st 2^x väärtuste leidmine 3 p x väärtuste leidmine 2 p Parameetri b väärtuse leidmine 2 p Pindala leidmine 1 p