

Matemaatika RE põhieksami 2022 ülesanded ja hindamisjuhend

LAI KURSUS

Ülesanne 1. (5 punkti)

Kulumise tõttu kaotab auto igal aastal 15% oma väärtusest. Neli aastat pärast ostmist on auto väärtus 26100 eurot.

1. Arvutage auto ostuhind.
2. Mitme euro võrra väheneb auto väärtus esimese aasta lõpuks?

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. $a\left(1 - \frac{15}{100}\right)^4 = 26100$ $a = 26100 : 0,85^4 \approx 49999,40$ (€) <u>Vastus.</u> Auto ostuhind oli 49999,40 €. 2. $0,15 \cdot 49999,40 = 7499,91$ (€) <u>Vastus.</u> Esimese aasta lõpuks väheneb hind 7499,91 € võrra.	Sisu mõistmine ja ostuhinna arvutamine (4 punkti) Väärtuse muudu arvutamine (1 punkt)	5 punkti	Kast 1

Ülesanne 2. (5 punkti)

- Lihtsustage avaldis $\frac{3\sqrt{x}-x}{12x} : \frac{9-x}{(3+\sqrt{x})^2 - (3-\sqrt{x})^2}$.
- Kas selle avaldise väärtus saab olla 1? Põhjendage vastust.

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. $\frac{3\sqrt{x}-x}{12x} : \frac{9-x}{(3+\sqrt{x})^2 - (3-\sqrt{x})^2} =$ $= \frac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{12x} \cdot \frac{(9+6\sqrt{x}+x)-(9-6\sqrt{x}+x)}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} =$ $= \frac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{12x} \cdot \frac{12\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} = \frac{1}{3+\sqrt{x}}$ <u>Vastus.</u> Lihtsustatud avaldis on $\frac{1}{3+\sqrt{x}}$.	Avaldise lihtsustamine (4 punkti)	5 punkti	Kast 2
2. $\frac{1}{3+\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow 3+\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = -2$, mis on võimatu, kuna $\sqrt{x} \geq 0$. <u>Vastus.</u> Avaldise väärtus ei saa olla 1.	Õige järeldus koos põhjendusega (1 punkt)		

Ülesanne 3. (5 punkti)

Ühes urnis on 2 valget, 3 punast ja 5 sinist kuuli ning teises urnis on 4 valget ja 8 sinist kuuli. Kummastki urnist võetakse juhuslikult üks kuul. Kui suur on tõenäosus, et

- 1) võetud kaks kuuli on punast värvi;
- 2) võetud kaks kuuli on sinist värvi;
- 3) võetud kuulidest on üks valge ja üks sinine?

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
1) Tegemist on võimatu sündmusega, seega $P(A) = 0$. <u>Vastus.</u> Tõenäosus, et kaks kuuli on punased, on 0.	Arusaamine, et sündmus on võimatu, ja vastava tõenäosuse leidmine (1 punkt)	1 punkt	Kast 3
2) $P(B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{8}{12} = \frac{1}{3}$ <u>Vastus.</u> Tõenäosus, et kaks kuuli on sinised, on $\frac{1}{3}$.	Tõenäosuse mõiste ja korrutamislause rakendamine ning tõenäosuse arvutamine (2 punkti)	4 punkti	Kast 4
3) Kaks olukorda: I urnist valge ja II urnist sinine kuul: $p_1 = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{15}$ või I urnist sinine ja II urnist valge kuul: $p_2 = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{12} = \frac{1}{6}$ $P(B) = p_1 + p_2 = \frac{3}{10}$ <u>Vastus.</u> Tõenäosus, et üks kuulidest on valge ja üks sinine, on $\frac{3}{10}$.	Liitmislause rakendamine ja tõenäosuse arvutamine (2 punkti)		

Ülesanne 4. (5 punkti)

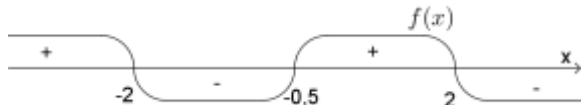
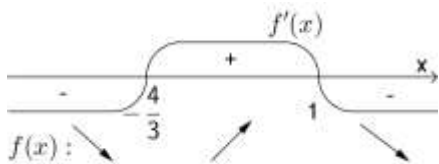
Lahendage võrrand $2x - 4 = \sqrt{x^2 - x + 4}$.

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
$2x - 4 = \sqrt{x^2 - x + 4}$ $(2x - 4)^2 = x^2 - x + 4$ $4x^2 - 16x + 16 = x^2 - x + 4$ $3x^2 - 15x + 12 = 0 \quad : 3$ $x^2 - 5x + 4 = 0$ $x_1 = 1; x_2 = 4$ Kontroll. $x_1 = 1$: $v = 2 \cdot 1 - 4 = -2$ $p = \sqrt{1^2 - 1 + 4} = 2$ $v \neq p$, võõrlahend $x_2 = 4$: $v = 2 \cdot 4 - 4 = 4$ $p = \sqrt{4^2 - 4 + 4} = 4$ $v = p$ <u>Vastus.</u> $x = 4$	Pärast võrrandi poolte ruutu tõstmist õige ruutvõrrandi saamine (2 punkti) Ruutvõrrandi lahendamine (1 punkt) Lahendite kontrollimine, võõrlahendi eemaldamine ja vastuse esitamine (2 punkti)	5 punkti	Kast 5

Ülesanne 5. (10 punkti)

On antud funktsioon $f(x) = (4 - x^2)(2x + 1)$.

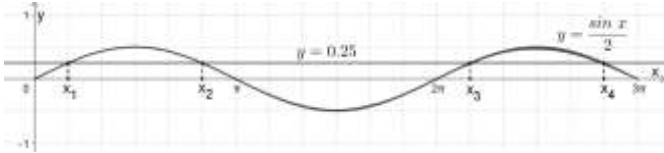
- Leidke funktsiooni $f(x)$
 - positiivsuspiirkond;
 - maksimumpunkti koordinaadid.
- Koostage funktsiooni $f(x)$ graafiku puutuja võrrand kohal $x_0 = -1$.

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. 1) nullkohad: $f(x) = 0 \Rightarrow (2 - x)(2 + x)(2x + 1) = 0$ $X_0 = \{-2; -0,5; 2\}$ $X^+ : f(x) > 0 \Rightarrow X^+ = (-\infty; -2) \cup (-0,5; 2)$  <u>Vastus.</u> $X^+ = (-\infty; -2) \cup (-0,5; 2)$.	Funktsiooni nullkohtade leidmine (1 punkt) Funktsiooni positiivsuspiirkonna leidmine (2 punkti)	3 punkti	Kast 6
2) $f'(x) = (-2x^3 - x^2 + 8x + 4)' = -6x^2 - 2x + 8$ $X_e : f'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 - 2x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{4}{3}; x_2 = 1$  $x_{\max} = 1; y_{\max} = (4 - 1^2)(2 \cdot 1 + 1) = 9 \Rightarrow E_{\max}(1; 9)$ <u>Vastus.</u> $E_{\max}(1; 9)$.	Funktsiooni tuletise leidmine (1 punkt) Funktsiooni ekstreemumkohtade leidmine (2 punkti) Maksimumpunkti abstsissi leidmine (liigi määramine) (1 punkt) Maksimumpunkti ordinaadi leidmine (1 punkt)	5 punkti	Kast 7

2. $y_0 = (4 - (-1)^2)(2(-1) + 1) = -3 \Rightarrow P(-1; -3)$ $k = f'(-1) = -6 \cdot (-1)^2 - 2(-1) + 8 = 4$ $y + 3 = 4(x + 1) \Rightarrow y = 4x + 1$ <u>Vastus.</u> Puutuja võrrand on $y = 4x + 1$.	Puutuja võrrandi koostamine (2 punkti)	2 punkti	Kast 8
--	--	-----------------	---------------

Ülesanne 6. (10 punkti)

- Lihtsustage avaldis $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \cos^3 \alpha}{\sin 2\alpha}$, kus α on mingi teravnurk ja $\beta = 90^\circ$.
- Konstrueerige antud koordinaatteljestikus funktsiooni $f(x) = \frac{\sin x}{2}$ graafik lõigul $[0; 3\pi]$ ja lahendage samal lõigul võrrand $f(x) = \frac{1}{4}$.

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. Kui $\beta = 90^\circ$, siis $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \cos^3 \alpha}{\sin 2\alpha} =$ $= \frac{\sin(\alpha + 90^\circ) - \cos^3 \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin 2\alpha} =$ $= \frac{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2}$ 2.  Lõigul $[0; 3\pi]$ on joontel $f(x) = \frac{\sin x}{2}$ ja $y = \frac{1}{4}$ neli lõikepunkti, mille abstsissid: on $x_1 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$; $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$; $x_3 = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} = 390^\circ$; $x_4 = 3\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6} = 510^\circ$	Trigonomeetrilise avaldise lihtsustamine (4 punkti) Funktsiooni $f(x)$ graafiku joonestamine antud lõigul (1 punkt) Trigonomeetrilise võrrandi lahendamine antud lõigul (5 punkti)	4 punkti 1 punkt 5 punkti	Kast 9 Kast 10 Kast 11

<u>Vastus.</u> Võrrandi lahendid on $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$ ja $\frac{17\pi}{6}$.			
---	--	--	--

Ülesanne 7. (10 punkti)

Väikeettevõtjaga sõlmiti kokkulepe vähemalt 160 toote valmistamiseks ning fikseeriti ühe valmistatud toote eest makstav algne hind. Lisaks lepiti kokku tasustamisviis juhuks, kui ettevõtjal õnnestub sama aja jooksul valmistada rohkem tooteid. Sellisel juhul makstakse talle 161. toote eest 8 eurot ja 50 senti ning seejärel iga järgmise toote eest 50 senti rohkem kui eelmise eest. Valmistades 180 toodet, teeniks ettevõtja 1385 eurot.

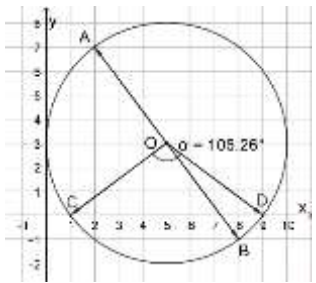
1. Leidke ühe toote algne hind.
2. Kui palju makstakse ettevõtjale toodangu eest kokku juhul, kui viimase toote hind on 4 korda algsest hinnast suurem?

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. $a_1 = 8,5 \text{ €}$ (161. toote eest makstav tasu); $a_2 = 9 \text{ €}$ (162. toote eest makstav tasu) jne. Tegemist on aritmeetilise jadaga, mille vahe $d = 0,5$. 161. kuni 180. toote valmistamise eest teenib ettevõtja $S_{20} = \frac{2 \cdot 8,5 + 19 \cdot 0,5}{2} \cdot 20 = 265 \text{ €}$; Esimese 160 toote eest $1385 - 265 = 1120 \text{ €}$, seega ühe toote algne hind on $1120 : 160 = 7 \text{ €}$. <u>Vastus.</u> Ühe toote algne hind on 7 eurot.	Aritmeetilise jada liikmete kirjeldamine (2 punkti) 161. kuni 180. toote valmistamise eest makstava tasu arvutamine (2 punkti) Ühe toote algse hinna leidmine (2 punkti)	6 punkti	Kast 12
2. Kui viimase toote hind on $a_n = 4 \cdot 7 = 28 \text{ €}$, siis $8,5 + (n-1) \cdot 0,5 = 28 \Rightarrow n = 40$, st 160 tootele lisaks valmistab ettevõtja 40 toodet. Ettevõtja teenib $1120 + S_{40} = 1120 + \frac{8,5 + 28}{2} \cdot 40 = 1850 \text{ €}$ <u>Vastus.</u> Ettevõtjale makstakse kokku 1850 eurot.	Valmistatud toodete arvu leidmine (2 punkti) Ettevõtjale makstava tasu leidmine (2 punkti)	4 punkti	Kast 13

Ülesanne 8. (10 punkti)

Ringjoon keskpunktiga $O(5; 3)$ läbib vektori $\overrightarrow{OA} = (-3; 4)$ lõpp-punkti A .

1. Leidke ringjoone diameetri AB otspunkti B koordinaadid.
2. Koostage selle ringjoone võrrand.
3. Arvutage ringjoone selle kaare pikkus, mis asub x -teljest allpool.

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. $A(5-3; 3+4) = (2; 7)$ $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} = (3; -4)$ $B(5+3; 3-4) = (8; -1)$ <u>Vastus.</u> $B(8; -1)$. 	Punkti B koordinaatide leidmine mis tahes viisil (2 punkti)	2 punkti	Kast 14
2. $r = \overrightarrow{OA} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ Ringjoone võrrand: $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 5^2$ <u>Vastus.</u> Ringjoone võrrand on $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$	Raadiuse pikkuse arvutamine (1 punkt) Ringjoone võrrandi koostamine (1 punkt)	2 punkti	Kast 15
3. Ringjoone lõikepunktid x-teljega: $(x-5)^2 + (0-3)^2 = 25 \Rightarrow (x-5)^2 = 16 \Rightarrow x-5 = \pm 4$ $x_1 = 1; x_2 = 9 \Rightarrow C(1; 0)$ ja $D(9; 0)$ $\overrightarrow{OC} = (1-5; 0-3) = (-4; -3)$ $\overrightarrow{OD} = (9-5; 0-3) = (4; -3)$ Kesknurk: $\cos \angle COD = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}}{ \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} }$ $\cos \angle COD = \frac{-4 \cdot 4 - 3 \cdot (-3)}{5 \cdot 5} = \frac{-16+9}{25} = -\frac{7}{25}$	Ringjoone ja x-telje lõikepunktide koordinaatide arvutamine (2 punkti) Kesknumbra arvutamine (2 punkti) Kaare pikkuse arvutamine (2 punkti)	6 punkti	Kast 16

$\angle COD \approx 106,3^\circ$ Kaare pikkus $\frac{106,3^\circ \cdot \pi \cdot 5}{180^\circ} \approx 9,3$ (ü) <u>Vastus.</u> Kaare pikkus on 9,3 ü.			
---	--	--	--

Ülesanne 9. (10 punkti)

1. Lahendage võrratusesüsteem
$$\begin{cases} (x+4) \cdot x > 5 \\ \frac{x^2}{x-2} > 0 \end{cases}.$$

2. Lahendage võrrand $\log_2(x+4) + \log_2 x = 5$. Kas sellel võrrandil leidub lahend, mis kuulub alaülesandes 1 toodud võrratusesüsteemi lahendite hulka?

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. $(x+4) \cdot x > 5 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 > 0$ Nullkohad $x_1 = -5$; $x_2 = 1$  $L_1 = (-\infty; -5) \cup (1; \infty)$ $\frac{x^2}{x-2} > 0 \Rightarrow x^2(x-2) > 0$  $L_2 = (2; \infty)$ Süsteemi lahendihulk $L = L_1 \cap L_2 = (2; \infty)$ <u>Vastus.</u> $L = (2; \infty)$.	Ruutvõrratuse lahendamine (2 punkti) Murdvõrratuse lahendamine (2 punkti) Võrratusesüsteemi lahendihulga leidmine (1 punkt)	5 punkti	Kast 17
2. $\log_2(x+4) + \log_2 x = 5 \Rightarrow \log_2[(x+4)x] = 5$ $(x+4)x = 2^5 \Rightarrow x^2 + 4x - 32 = 0$ $x_1 = -8$; $x_2 = 4$ $x_1 = -8$ on võõrlahend, sest $\log_2(-4)$ ja $\log_2(-8)$ ei eksisteeri.	Logaritmi omaduste ja definitsiooni rakendamine (2 punkti) Ruutvõrrandi lahendamine (1 punkt) Võõrlahendi eemaldamine, otsuse tegemine (2 punkti)	5 punkti	Kast 18

$x_2 = 4$ korral $v = \log_2(4+4) + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$, $v = p$ <u>Vastus.</u> Võrrandi lahend on $x = 4$, mis kuulub võrratusesüsteemi lahendihulka.			
---	--	--	--

Ülesanne 10. (10 punkti)

Ott võitis autoralli etapi, mille pikkuseks oli 13,2 km. Selle etapi läbimiseks kulus Otil 8 sekundit vähem kui Markol, kelle keskmine kiirus oli Oti keskmisest kiirusest 2 km/h võrra väiksem.

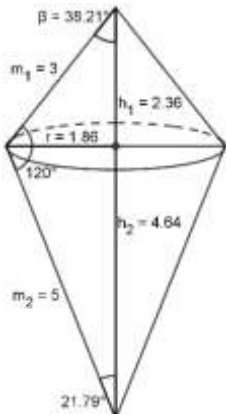
1. Leidke Oti keskmine kiirus sellel etapil.
2. Millise ajaga läbis etapi Marko? Vastus esitage minutites ja sekundites.

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. Oti keskmine kiirus $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$, aeg $\frac{13,2}{x}$ h; Marko keskmine kiirus $x - 2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, aeg $\frac{13,2}{x-2}$ h. Aegade vahe 8 s = $\frac{8}{3600}$ h = $\frac{1}{450}$ h: $\frac{13,2}{x-2} - \frac{13,2}{x} = \frac{1}{450} \Rightarrow \frac{13,2}{x-2} - \frac{13,2}{x} - \frac{1}{450} = 0$ $\frac{13,2 \cdot 450x - 13,2 \cdot 450(x-2) - x(x-2)}{450x(x-2)} = 0$ $\frac{-x^2 + 2x + 11880}{450x(x-2)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + 11880 = 0 \\ 450x(x-2) \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 110; & x_2 = -108 \\ x \neq 0; & x \neq 2 \end{cases}$ Kuna x on Oti keskmine sõidukiirus, siis $x = 110$ km/h <u>Vastus.</u> Oti keskmine sõidukiirus on 110 km/h.	Ajaühikute teisendamine (1 punkt) Muutuja(te) kirjeldamine ja võrrandi(süsteemi) koostamine (3 punkti) Võrrandi(süsteemi) lahendamine (3 punkti) Keskmise kiiruse leidmine (1 punkt)	8 punkti	Kast 19
2. Otil kulub etapi läbimiseks $13,2 : 110 = 0,12$ h ehk 432 s, Markol kulub $432 + 8 = 440$ s ehk 7 min 20 s või	Aja leidmine mis tahes viisil, vastuse esitamine minutites ja sekundites (2 punkti)	2 punkti	Kast 20

Marko keskmine kiirus oli $110 - 2 = 108$ km/h, etapi läbimiseks kulus $13,2 : 108 = \frac{11}{90}$ h ehk 440 s ehk 7 min 20 s. <u>Vastus.</u> Marko läbis etapi 7 minuti 20 sekundiga.			
--	--	--	--

Ülesanne 11. (10 punkti)

Kolmnurga küljed on 3 dm ja 5 dm ning nendevaheline nurk on 120° . Kolmnurk pöörleb ümber pikima külje. Leidke tekkinud pöördkeha pindala ja ruumala.

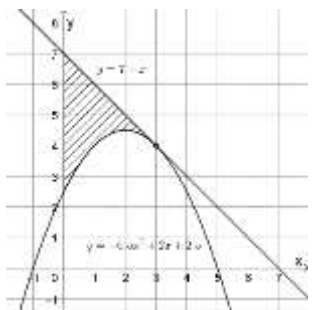
Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
$m_1 = 3 \text{ dm}$ $m_2 = 5 \text{ dm}$ Kolmnurga pikim külg: $a^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ =$ $= 9 + 25 + 15 = 49$ $a = \sqrt{49} = 7 \text{ (dm)}$ Kolmnurga pindala $S_{\Delta} = \frac{3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ (dm}^2\text{)}$ Kolmnurga pikemale küljele tõmmatud kõrgus, mis on koonuste ühise põhja raadius: $\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{7 \cdot r}{2} \Rightarrow r = \frac{15\sqrt{3} \cdot 2}{4 \cdot 7} = \frac{15\sqrt{3}}{14} \approx 1,86 \text{ (dm)}$ või $\cos \beta = \frac{3^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{11}{14} \Rightarrow \beta \approx 38,2^\circ$ $\sin \beta = \frac{r}{m_1} \Rightarrow r \approx 3 \cdot \sin 38,2^\circ \approx 1,86 \text{ (dm)}$ Pöördkeha pindala: $S = \pi m_1 + \pi m_2 = \pi(m_1 + m_2)$ $S = \pi \cdot \frac{15\sqrt{3}}{14} (3 + 5) = 2\pi = \frac{60\pi\sqrt{3}}{7} \approx 46,6 \text{ (dm}^2\text{)}$ Pöördkeha ruumala:	 Pikima külje leidmine (2 punkti) Koonuste ühise põhja raadiuse leidmine (2 punkti) Pöördkeha pindala arvutamine (3 punkti) Pöördkeha ruumala arvutamine (3 punkti)	10 punkti	Kast 21

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi r^2 a$ $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{15\sqrt{3}}{14}\right)^2 \cdot 7 = \frac{225\pi}{28} \approx 25,2 \text{ (dm}^3\text{)}$ <u>Vastus.</u> Pöördkeha pindala on 46,6 cm² ja ruumala 25,2 cm³.			
---	--	--	--

Ülesanne 12. (10 punkti)

Kujund on piiratud y -teljega, parabooliga $y = -0,5x^2 + 2x + 2,5$ ja sirgega $y = 7 - x$.

1. Tehke joonis ja viirutage kirjeldatud kujund.
2. Arvutage selle kujundi täpne pindala.

Lahendus	Teadmised ja oskused / hindamine	Punktid	Hindamiskast
1. Parabooli nullkohad $x_1 = -1$; $x_2 = 5$; haripunkt $H(2; 4,5)$  2. Raja arvutamine: $7 - x = -0,5x^2 + 2x + 2,5 \Rightarrow 7 - x + 0,5x^2 - 2x - 2,5 = 0$ $0,5x^2 - 3x + 4,5 = 0$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 0,5 \cdot 4,5}}{2 \cdot 0,5} = 3 \pm 0 \Rightarrow x = 3$ Kujundi pindala: $S = \int_0^3 (7 - x - (-0,5x^2 + 2x + 2,5)) dx =$ $= \int_0^3 (0,5x^2 - 3x + 4,5) dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + \frac{9x}{2} \right) \Big _0^3 =$	Parabooli joonestamine (2 punkti) Sirge joonestamine (1 punkt) Õige kujundi viirutamine (1 punkt) Raja (ühise punkti abstsissi) arvutamine (2 punkti) Kujundi pindala arvutamine (4 punkti)	4 punkti 6 punkti	Kast 22 Kast 23

$= \frac{3^3}{6} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} + \frac{9 \cdot 3}{2} - 0 = 4,5$ <u>Vastus.</u> Kujundi pindala on 4,5 ü².			
---	--	--	--