

1. Eksami korraldusest

2005. aasta matemaatika riigieksam toimub 21. mail. Eksaminandidele, kes mõjuval põhjusel 21. mail eksamil osaleda ei saanud, korraldatakse riigieksam 8. juunil.

Matemaatika riigieksam on kirjalik eksam ja viiakse läbi kahes osas.

1. osa kestus on 120 minutit ja 2. osa kestus samuti 120 minutit. Kaheksamiosa vahel on vaheaeg kestusega 45 minutit, mida võib kasutada oma tahtmist mööda.

Eksami esimese osa ülesannetega kontrollitakse gümnaasiumi iga ainekursuse (vt “**Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava**”, Riigi Teataja I osa nr 20 22. veebr. 2002)¹ põhiteadmiste ja -oskuste omamist ning oskust neid rakendada. Eksami 1. osas tuleb lahendada neli 5-punktilist ülesannet ja kolm 10-punktilist ülesannet, kokku 7 ülesannet, mille õiged lahendused annavad 50 hindepunkti.

Eksami teise osa ülesannetega kontrollitakse, kuivõrd struktureeritud on eksaminandi teadmised, kui hästi ta suudab õpitut rakendada mitterutiinsete ülesannete korral, milline on eksaminandi ettevalmistus õpingute jätkamiseks järgmisel astmel. Eksami 2. osas tuleb lahendada 3 ülesannet, kaks 15-punktilist ülesannet ja üks 20-punktiline valikülesanne ette antud kahe erinevatesse ainevaldkondadesse kuuluva 20-punktilise ülesande hulgast. 2. osa ülesannete õiged lahendused annavad samuti 50 hindepunkti.

Maksimaalse tulemuse (100 punkti) saamiseks tuleb õigesti lahendada 10 ülesannet.

Eksam loetakse sooritatuks, kui eksami 1. ja 2. osa hindepunktide summa on vähemalt 20 punkti.

Teooriaküsimusi 2005. a riigieksamitöös iseseisvate ülesannetena ei esine.

Kõik ülesannete lahendamiseks vajalikud andmed on ülesannete tekstidega ette antud. Eksamil ei ole lubatud kasutada teatmikke, käsiraamatuid ja muid abimaterjale.

Eksamil võib kasutada kalkulaatorit, mis ei sisalda teksti. Valemeid peab eksaminand teadma peast. Kui kalkulaatoril on klahvid, mis võimaldavad arvutusi teha valemeid kasutamata (näiteks ruutvõrrandi lahendamine jms), tuleb vastavad valemid eksamitöösse siiski kirjutada.

Kalkulaator, kirjutus- ja joonestusvahendid (pliiats, joonlaud, sirkel), peavad eksaminandil endal eksamil kaasas olema.

Paberi lahenduste vormistamiseks ja mustandi jaoks annab eksamikeskus. Eksami lõppedes annab eksaminand lahenduste lehe ja mustandi lehe üle eksamikomisjonile.

2. Näiteid eksamiülesannete taseme ja lahenduse vormistamise kohta

Ülesanne (5 punkti). Antud on funktsioon $y = \sqrt{x}$. Leidke funktsiooni

a) määramispiirkond;

b) graafikul selle punkti abstsiss, milles puutuja tõus on 1.

Lahendus.

a) Kuna ruutjuurt saab leida ainult mittenegatiivsetest arvudest, siis on määramispiirkonnaks poolsirge $[0, \infty)$.

b) Kui puutepunkti koordinaadid on $(x_0; y_0)$, siis puutuja tõus on $y'(x_0)$.

Leiame y' ja kasutades ülesande tingimust, et $y'(x_0)=1$, arvutame x_0 :

$$y' = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

¹ Koopia Riigi Teatajas ilmunud matemaatika ainekavast on näiteks kirjastuse Argo väljaande „Matemaatika riigieksami ülesanded koos vastustega 1997-2004“ lisas, täpsustatud gümnaasiumi ainekava Argo väljaandes „Eksaminandile matemaatika riigieksamist 2005“.

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4}.$$

Vastus. a) Funktsiooni $y = \sqrt{x}$ määramispiirkond on poolsirge $[0, \infty)$;

b) puutuja tõus on 1 punktis, mille abstsiss on $\frac{1}{4}$.

Ülesanne (10 punkti). Matemaatika riigieksamit tegi 2002. aastal eestikeelsetes gümnaasiumides 147 lõpetajat, kelle matemaatika aastahinne oli kaks. Riigieksamil saadud punktide järgi jagunevad lõpetajad järgmiselt:

Punkte	1- 10	11- 20	21-30	31- 40	41- 50	51- 60	61-70	71-80
Õpilasi	5	26	36	36	21	16	6	1

1) Võtke sagedustabelis igas vahemikus eksamitulemuseks vahemiku keskpunkt ja lisage suhteliste sageduste rida.

2) Leidke eksamitulemuse keskmise hinnang.

3) Mitu protsenti lõpetajatest sai eksamitulemuseks üle 50 punkti?

4) Joonestage õpilaste jaotuse histogramm.

Lahendus

1) Õpilaste jaotustabel eksamipunktide järgi on:

Eksamitulemus (X)	5,5	15,5	25,5	35,5	45,5	55,5	65,5	75,5
Õpilaste arv (f)	5	26	36	36	21	16	6	1
Suhteline sagedus (w)	0,034	0,177	0,245	0,245	0,143	0,109	0,041	0,007

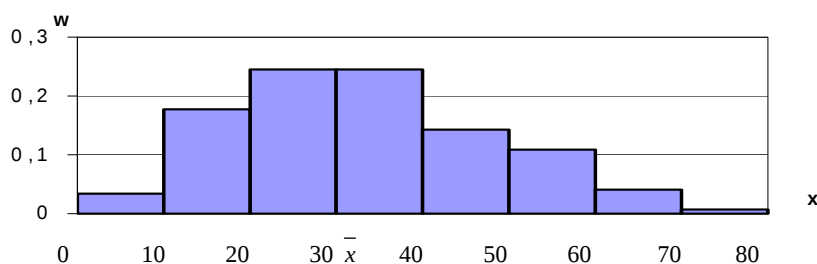
$$2) \bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 + x_6 f_6 + x_7 f_7 + x_8 f_8)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{147} (5,5 \cdot 5 + 15,5 \cdot 26 + 25,5 \cdot 36 + 35,5 \cdot 36 + 45,5 \cdot 21 + 55,5 \cdot 16 + 65,5 \cdot 6 + 75,5 \cdot 1) = \\ &= \frac{4938,5}{147} \approx 33,6 \end{aligned}$$

Seega eksamitulemuse keskmise hinnanguks on 33,6 punkti.

3) Jaotustabelist $(w_6 + w_7 + w_8) \cdot 100\% = (0,109 + 0,041 + 0,007) \cdot 100\% = 15,7\%$. Seega ligikaudu 16% selle grupi lõpetajatest sai eksamitulemuseks üle 50 punkti.

4) Joonestame histogrammi.



Ülesanne (15 punkti). Antud on funktsioon $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Leidke funktsiooni

a) määramispiirkond;

b) tuletis;

c) graafiku puutuja võrrand punktis, mille abstsiss on e^2 ;

d) kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning ekstreemum.

Lahendus

a) Kuna logaritmifunktsioon on määratud vaid argumenti positiivsete väärtuste korral ja nulliga jagamine ei ole võimalik, siis tuleb lahendada võrratusesüsteem:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0,1) \cup (1, \infty).$$

Määramispiirkonnaks on hulk $(0,1) \cup (1, \infty)$.

b) Leiame: $f'(x) = \frac{x' \ln x - (\ln x)' x}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - \frac{x}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$. Seega $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

c) Punktis $(x_0; y_0)$ funktsiooni graafiku puutuja võrrand on

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Leiame $f'(x_0)$ ja $y_0 = f(x_0)$, kui $x_0 = e^2$, ning koostame puutuja võrrandi:

$$f'(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{(\ln e^2)^2} = \frac{2 \ln e - 1}{(2 \ln e)^2} = \frac{2 - 1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad y_0 = f(e^2) = \frac{e^2}{\ln e^2} = \frac{e^2}{2}.$$

Puutuja võrrand on: $y - \frac{e^2}{2} = \frac{1}{4}(x - e^2) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}e^2 + \frac{e^2}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{e^2}{4}$.

d) Funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemike leidmiseks lahendame võrratused $f'(x) > 0$ ja $f'(x) < 0$.

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0 \Rightarrow \ln x - 1 > 0 \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow x > e$$

Seega funktsiooni kasvamisvahemikuks on vahemik (e, ∞) .

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} < 0 \Rightarrow \ln x - 1 < 0 \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow x < e$$

Seega funktsiooni kahanemisvahemikud on $(0,1)$ ja $(1,e)$.

Kuna funktsioon $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ on oma määramispiirkonnas diferentseeruv, siis võivad ekstreemumkohtadeks olla

vaid tuletise nullkohad. Kuna $f'(e) = 0$ ja punktist e läbiminekul funktsiooni tuletise märk ($x < e$ korral

$f'(x) < 0$, $x > e$ korral $f'(x) > 0$) muutub miinusest plussiks, siis on funktsioonil kohal e lokaalne miinimum.

Leiame $f(e) = \frac{e}{\ln e} = \frac{e}{1} = e$.

Seega funktsiooni lokaalne miinimum on võrdne arvuga e .